NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de novembre 1899. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 276-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__276_0>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1899. — COMPOSITIONS.

Lille.

Calcul différentiel et intégral.

On considère l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3(1-x)}{x} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{6}{x} \cdot \frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

Cette équation peut être ramenée à une équation linéaire à coefficients constants par une substitution de la forme $y = \frac{v}{u}$, *v désignant la nouvelle fonction et u un polynome entier en x convenablement choisi.*

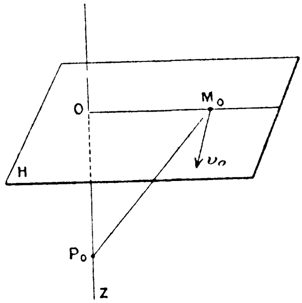
Déterminer ce polynome u et intégrer complètement l'équation proposée.

Mécanique rationnelle.

Étudier le mouvement de deux points matériels pesants de masses égales, assujettis à se mouvoir sans frottement, l'un P, *sur une verticale* OZ, *l'autre* M, *sur un plan horizontal* H, *et reliés par un fil flexible, inextensible et sans masse.*

A l'origine du mouvement, le point P *est au-dessous du plan horizontal, en* P_0, *à une distance de ce plan*

$OP_0 = h_0$; *le fil est tendu; la vitesse initiale* v_0 *du point* M, *qui est alors en* M_0, *est perpendiculaire à* OM_0



et a pour valeur $\sqrt{2gh_0}$, g *désignant l'accélération due à la pesanteur.*

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Diagramme entropique. Théorème sur le coefficient économique maximum.*

II. *Une poutre droite, de longueur* $4l$, *reposant sur deux appuis de niveau, supporte une charge uniformément répartie* p *par unité de longueur et une charge isolée* $4pl$ *appliquée au quart de sa longueur. Déterminer le moment fléchissant maximum et la flèche.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne les principales dimensions d'une distribution à tiroirs superposés système Meyer.*

1° *Dessiner une coupe longitudinale et indiquer brièvement le fonctionnement de cette distribution;*

2° *Déterminer, à l'aide de l'épure de Zenner, les écartements des tasseaux correspondants à divers indices de détente donnés. (Négliger l'obliquité des bielles.)*

Lyon.

Analyse.

I. *Les trois coordonnées rectangulaires d'un point sur une courbe* C *étant exprimées en fonction de l'arc, trouver l'enveloppe du plan rectifiant* P (*plan perpendiculaire en chaque point à la normale principale*). *Quelle doit être* C *pour que cette enveloppe soit un cylindre?*

Les cosinus directeurs de la normale principale sont

$$x'',\quad y'',\quad z'',\qquad x''=\frac{d^2x}{ds^2},\qquad \ldots .$$

L'équation de P, en coordonnées courantes u, v, w, est

$$x''(u-x)+y''(v-y)+z''(w-z)=0.$$

L'enveloppe s'obtient par les procédés habituels. Si cette enveloppe est un cylindre dont l'axe a A, B, C pour cosinus directeurs, on a

$$\mathrm{A}x''-\mathrm{B}y''+\mathrm{C}z''=0,$$

d'où

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y-\mathrm{C}z=as+b$$

(a et b = const. arbitr.).

La tangente à la courbe C fait un angle constant avec l'axe du cylindre, etc.

II. *Intégrer l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre*

$$\Delta(y)=\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2=\Delta(u),$$

où u *est une fonction connue de* x.

$\Delta(y)$ ne change pas quand on change successivement y en $y + A$, By, y^{-1} (A, B = const. arbitr.), et enfin en

$$\frac{ay + b}{cy + d} \qquad (ad - bc = 1)$$

(a, b, c, d = const. arbitr.). D'autre part, u est intégrale et aussi (en vertu de ce qui vient d'être dit) $\frac{au + b}{cu + d}$, expression à trois paramètres. L'intégrale générale est donc

$$y = \frac{au + b}{cu + d},$$

où a, b, c, d sont quatre constantes arbitraires assujetties à $ad - bc = 1$.

III. *On envisage la fonction algébrique u de la variable complexe z, définie par l'équation $u^2 + z^5 = 1$. On prendra la détermination $u = +1$ pour $z = 0$.*

z, partant de l'origine des coordonnées, y revient après avoir parcouru divers circuits fermés Γ. Distinguer parmi les Γ ceux qui ramènent et ceux qui ne ramènent pas la détermination initiale $u = +1$.

Même question pour la fonction algébrique z de u, définie par la même équation. La détermination initiale est $z = +1$ pour $u = 0$.

Quelles sont les valeurs diverses de l'intégrale

$$I = \int_0^x \frac{dz}{u} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{1 - z^5} & \\ u = +1 & \textit{pour } z = 0 \end{array} \right\} ?$$

Les deux déterminations de u s'échangent quand z tourne autour d'un des cinq points θ^i, ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), θ étant une racine primitive cinquième de l'unité, et autour du point ∞.

Les cinq déterminations de z s'échangent circulairement quand u tourne autour d'un des trois points $+1$, -1, ∞.

La discussion s'achève sans difficulté.

Mécanique.

Un point M *matériel de masse* m *se meut sans frottement sur un cône de révolution* S, *à axe vertical; l'angle au sommet est* $2\alpha\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. S *est limité à sa nappe supérieure.*

M *est attiré vers l'axe de* S *par une force perpendiculaire à cet axe; l'intensité de l'attraction est*

$$K^2 mr,$$

où r *est la distance de* M *à l'axe et* K *un coefficient numérique.*

Trouver le mouvement, sachant que la vitesse initiale est tangente au parallèle de départ.

Calculer, en fonction des coordonnées de M, *la réaction normale du cône. Cette réaction peut-elle s'annuler?*

Théorèmes des aires et des forces vives. Coordonnées semi-polaires.

Mathématiques préparatoires.

Géométrie analytique. — *On a, en coordonnées rectangulaires, la conique* C, $4xy + 4y = 1$.

Montrer que C *est une hyperbole équilatère.*

Construire le centre, les axes (distinguer l'axe transverse), les asymptotes.

Calculer, en faisant usage des invariants, les carrés *des demi-longueurs d'axes; construire les foyers et les directrices.*

ANALYSE. — *Trouver la courbe plane telle que le rapport entre l'ordonnée à l'origine de la tangente et l'abscisse à l'origine de la normale soit constant.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit la série* U *dont le terme général*

$$u_n = \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Montrer qu'en prenant seulement n termes on commet une erreur moindre que

$$\frac{1}{1-x^2}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Calculer, au moyen de cette remarque, avec sept décimales exactes, la valeur de la série pour $x = \frac{1}{10}$.

L'erreur commise est, pour $x > 0$,

$$E\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

où

$$E = 1 + x^2\,\frac{2n+1}{2n+3} + x^4\,\frac{2n+1}{2n+5} + \ldots,$$

$$E < 1 + x^2 + x^4 + \ldots,$$

$$E < \frac{1}{1-x^2}.$$

C. Q. F. D.

MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer, à un dix-millième près, les racines de l'équation algébrique du quatrième degré*

$$2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 25x - 112 = 0.$$

ANALYSE. — *On a l'équation aux dérivées partielles*

$$q + W(x, y, z, p) = 0; \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

I. *Soient* P *et* P′ *deux plans fixes quelconques. Considérons comme correspondants deux éléments linéaires situés à l'intersection respectivement de* P *et* P′ *avec une même* variété *ou* bande *caractéristique et appartenant aux plans* P *et* P′ *respectivement. Montrer que la correspondance définit une transformation* E *de contact.*

II. *Quand* P *et* P′ *sont tous deux parallèles au plan des xz et infiniment voisins l'un avec l'autre,* E *devient une transformation infinitésimale* ε *de contact.*

Montrer que la fonction caractéristique de ε *est précisément* W, *où y est traité comme un paramètre.*

III. *On supposera les coordonnées rectangulaires et*

$$W = A(y) + p\,B(y) + (x + pz)\,C(y) + D(y)\sqrt{1 + p^2}.$$

Montrer qu'il existe ∞^3 *surfaces intégrales coupées suivant des cercles par tous les plans parallèles à celui des xz. Construire ces surfaces et achever l'intégration.*

On se bornera à intégrer l'équation

$$(1) \qquad q + A + pB + C(x + pz) + D\sqrt{1 + p^2} = \quad ;$$

le reste résulte immédiatement de théories connues, exposées au Cours.

D'abord simplifions (1).

Posons $\eta = \int C(y)\,dy$. Alors

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dy} = C\frac{\partial z}{\partial \eta};$$

on divisera le premier membre de (1) par C sans en changer la forme. Cela revient à faire simplement $C(y) = 1$.

Posons ensuite

$$x = X + \xi(y), \qquad z = Z + \zeta(y),$$

il viendra

$$dz = p\,dx + q\,dy = dZ + \zeta'\,dy = P\,dX + (Q + \zeta')\,dy$$
$$= p\,dX + p\xi'\,dy + q\,dy;$$

$$P = \frac{\partial Z}{\partial X}, \qquad Q = \frac{\partial Z}{\partial y};$$

$$p = P, \qquad q = Q + \zeta' - P\xi';$$

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{dy}, \qquad \ldots.$$

(1) devient

$$Q + \mathcal{A} + P\,\mathcal{B} + X + PZ + D\sqrt{1 + P^2} = 0,$$
$$\mathcal{A} = \zeta' + \xi + A, \qquad \mathcal{B} = -\xi' + \zeta + B.$$

Déterminons ξ et ζ par les conditions

$$\zeta' + \xi + A = 0, \qquad \xi' - \zeta - B = 0,$$

c'est-à-dire

$$\xi'' + \xi + A - B' = \zeta'' + \zeta + A' + B = 0.$$

On n'a qu'à intégrer deux équations différentielles ordinaires du second ordre qui, rendues homogènes, sont à coefficients constants. Alors $A = B = 0$. Cela revient à faire $A = B = 0$ dans l'équation (1).

La double simplification $C = 1$ et $A = B = 0$ a pour propriété que les cercles, dont le plan est parallèle à celui des xz, se maintiennent tels.

On a à intégrer simplement, puisque $C = 1$, $A = B = 0$,

$$(2) \qquad q + x + pz + R(y)\sqrt{1 + p^2} = 0.$$

La surface S

$$(x + u)^2 + (z + v)^2 = \rho^2$$

(où u, v, ρ sont fonctions du seul y) est coupée suivant un cercle par tout plan parallèle à celui des xz. Exprimons que S est une surface intégrale

$$(x+u)+p(z+v)=0,$$
$$u'(x+u)+(z+v)(q+v')=\rho\rho',$$
$$p=-\frac{x+u}{z+v}, \qquad q=-v'+\frac{\rho\rho'-u'(x+u)}{z+v}.$$

Portons ces valeurs dans (2). Tout calcul fait, il viendra

$$x(u'-v)+z(v'+u)+uu'+vv'-\rho\rho'-\mathrm{R}\rho=0.$$

De là successivement

$$\left\{\begin{array}{l} u'=v, \qquad v'=-u, \qquad \rho'=-\mathrm{R}; \\ u''+u=v''+v=\rho'+\mathrm{R}=0; \\ u=\lambda\sin(y+\mu), \quad v=\lambda\cos(y+\mu), \quad \rho=\varpi-\int \mathrm{R}\,dy. \end{array}\right.$$

Il y a trois paramètres arbitraires λ, μ et ϖ et ∞^3 surfaces S.

Chaque S est engendrée par une circonférence de rayon variable dont le plan reste parallèle à celui des xz et dont le centre décrit une hélice tracée sur un cylindre de révolution autour de l'axe des y.

Possédant une intégrale complète, on achèvera la solution par les procédés ordinaires.

La simplification $\mathrm{C}=1$, $\mathrm{A}=\mathrm{B}=0$, n'est pas indispensable. Elle a été introduite pour faciliter la discussion géométrique, beaucoup plus rapide sur (2) que sur (1).

Cette discussion est intéressante. Par exemple, le *groupe fini continu* engendré par la transformation infinitésimale ε, considérée dans l'énoncé, représente le mouvement suivant : tout point du plan $y=$ const. est invariablement lié à une tangente à la circonférence

$$x^2+z^2=\mathrm{R}^2.$$

tandis que cette tangente roule sans glissement sur la circonférence.

Nous engageons le lecteur à achever l'étude géométrique des surfaces intégrales et des courbes caractéristiques.