GIACOMO CANDIDO

Pour la géométrie récente

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 244-255

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__244_1>

[K1c]

POUR LA GÉOMÉTRIE RÉCENTE;

PAR M. GIACOMO CANDIDO, à Pise.

Cette Note est une continuation d'un précédent article (1); pour abréger, je ne reproduirai pas les formules

(1) *Formules pour l'étude d'une figure remarquable* (*N. A.*, 1899, p. 31).

que j'y ai indiquées. J'en ai ajouté d'autres, quelques-unes tirées de l'article de M. le professeur Ferrari (mentionné *loc. cit.*); et d'autres qui résultent de la combinaison de celles-ci et de celles trouvées par moi dans l'article dont je viens de parler.

Voici les matières qui y sont développées :

Point de Lemoine et sa généralisation, indication sur le cercle de Lemoine; angle, point, cercle de Brocard; théorème d'où découle comme cas particulier le point de Gergonne; quelques points qui proviennent d'un théorème de M. Terquem; formules générales sur le triangle podaire et sur le triangle pédal d'un point, et quelques observations pouvant être d'une certaine utilité.

Les formules fondamentales dont je me suis servi peuvent, à mon avis, rendre des services dans les questions de Géométrie récente.

Indiquons par x, y, z les distances de P à a, b, c, respectivement; on a alors

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}
z &= \mathrm{AP}\sin\theta &&= \frac{bp\sin\mathrm{A}\sqrt{(1+p)(b^2p+c^2)-a^2p}}{(1+p+pq)\sqrt{b^2p^2+c^2+2bc\cos\mathrm{A}}},\\
y &= \mathrm{AP}\sin(\mathrm{A}-\theta) &&= \frac{c\sin\mathrm{A}\sqrt{(1+p)(b^2p+c^2)-a^2p}}{(1+p+pq)\sqrt{b^2p^2+c^2+2bc\cos\mathrm{A}}},\\
y &= \mathrm{CP}\sin\xi &&= \frac{am\sin\mathrm{C}\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2)-mc^2}}{(1+m+mp)\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos\mathrm{C}}},\\
x &= \mathrm{CP}\sin(\mathrm{C}-\xi) &&= \frac{b\sin\mathrm{C}\sqrt{(1+m)(a^2m+b^2)-mc^2}}{(1+m+mp)\sqrt{a^2m^2+b^2+2abm\cos\mathrm{C}}},\\
x &= \mathrm{BP}\sin\varphi &&= \frac{cq\sin\mathrm{B}\sqrt{(1+q)(c^2q+a^2)-b^2q}}{(1+q+mq)\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos\mathrm{B}}},\\
z &= \mathrm{BP}\sin(\mathrm{B}-\varphi) &&= \frac{a\sin\mathrm{B}\sqrt{(1+q)(qc^2+a^2)-b^2q}}{(1+q+mq)\sqrt{c^2q^2+a^2+2acq\cos\mathrm{B}}},
\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant qu'on demande quelles sont les valeurs de m, p, q pour lesquelles on a

$$x = y = z.$$

Égalisant alors deux à deux les valeurs de x, y, z que nous avons données, on a

$$bp \sin A = c \sin A, \qquad am \sin C = b \sin C, \qquad qc \sin B = a \sin B,$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{c}{b}, \qquad m = \frac{b}{a}, \qquad q = \frac{a}{c}.$$

On voit tout de suite que dans ce cas le point P *est le centre du cercle inscrit.*

Supposons qu'on demande que le point P soit tel qu'on ait

$$ax = by = cz,$$

alors répétant la même opération que ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} pbc \sin A &= bc \sin A, \\ mab \sin C &= ab \sin C, \\ qac \sin B &= ac \sin B, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$m = p = q = 1,$$

et le point demandé est le barycentre du triangle.

Supposons encore que l'on veuille savoir quel est le point pour lequel on a

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

il résulte toujours de nos formules

$$p\,\frac{b}{c} = \frac{c}{b}, \qquad m\,\frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \qquad q\,\frac{c}{a} = \frac{a}{c},$$

d'où

$$p = \frac{c^2}{b^2}, \qquad m = \frac{b^2}{a^2}, \qquad q = \frac{a^2}{c^2},$$

et le point demandé est précisément le point de Lemoine.

Enfin supposons qu'on demande les valeurs de m, p, q pour lesquelles on a

$$\frac{x}{a^{n-1}} = \frac{y}{b^{n-1}} = \frac{z}{c^{n-1}},$$

alors

$$m = \frac{b^n}{a^n}, \qquad p = \frac{c^n}{b^n}, \qquad q = \frac{a^n}{c^n}.$$

Ce point a été étudié par MM. G. Longchamps, Thiry, Lugli, etc.; nous l'indiquerons par K_n.

La formule du professeur Ferrari

$$(B) \quad \overline{PQ}^2 = \frac{\overline{AQ}^2 + m\overline{BQ}^2 + mp\overline{CQ}^2}{1 + m + mq} - \frac{mpa^2 + b^2q + c^2}{(1 + m + mp)^2} m,$$

que le lecteur interprétera aisément, permet d'établir l'existence du cercle de Lemoine; on peut voir, pour le développement de ces idées, le beau Mémoire de M. Thiry déjà cité. On observera, en outre, que la formule (B) comprend, dans sa généralité, des résultats obtenus pour le calcul des distances particulières.

2. Construisons par nos formules

$$\tang\xi = \tang\theta = \tang\varphi = \tang\omega;$$

on a

$$(1) \quad \frac{bp \sin A}{c + bp \cos A} = \frac{cq \sin B}{a + cq \cos B} = \frac{am \sin C}{b + am \cos C} = \tang\omega.$$

On a alors aussi l'équation

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} &(\cot\omega - \cot A)(\cot\omega - \cot B)(\cot\omega - \cot C) \\ &\quad = \frac{1}{\sin A \sin B \sin C}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4s}.$$

De (1), substituant la valeur trouvée pour tang ω,

$$m = \frac{b}{a \sin C(\cot A + \cot B)},$$

$$p = \frac{c}{b \sin A(\cot B + \cot C)},$$

$$q = \frac{a}{c \sin B(\cot A + \cot C)},$$

d'où

$$m = \frac{b^2}{c^2}, \qquad p = \frac{c^2}{a^2}, \qquad q = \frac{a^2}{b^2}.$$

Nous indiquerons par Ω le point déterminé par ces valeurs de m, p, q.

Construisons, de même,

$$\operatorname{tang}(A - \theta) = \operatorname{tang}(B - \varphi) = \operatorname{tang}(C - \zeta) = \operatorname{tang}\omega';$$

on obtient

$$(2) \qquad \frac{c \sin A}{bp + c \cos A} = \frac{a \sin B}{cq + a \cos B} = \frac{b \sin C}{am + b \cos C} = \operatorname{tang}\omega',$$

d'où résulte une équation identique à (1′), et, par suite,

$$(3) \qquad \cot\omega = \cot\omega' = \Sigma \cot A = \frac{\Sigma a^2}{4s}.$$

Le point déterminé par les valeurs de m, p, q indiquées dans (2) sont

$$m = \frac{b}{a} \sin C(\cot A + \cot B),$$

$$p = \frac{c}{b} \sin A(\cot B + \cot C),$$

$$q = \frac{a}{c} \sin B(\cot A + \cot C).$$

d'où

$$m = \frac{c^2}{a^2}, \qquad p = \frac{a^2}{b^2}, \qquad q = \frac{b^2}{c^2}.$$

Nous indiquerons par Ω' le point déterminé par ces valeurs de m, p, q.

L'angle ω indiqué dans (3) est l'angle de Brocard.

Les deux points Ω et Ω' sont les points de Brocard.

Au moyen de la formule (B) et en tenant compte de ce qu'on a trouvé auparavant, on calcule facilement les distances $\overline{OK_2}$, $\overline{O\Omega}$, $\overline{K_2\Omega}$, où O est le centre du cercle circonscrit au triangle; K_2 et Ω sont respectivement les points de Lemoine et de Brocard. On a

$$\overline{OK_2}^2 = R^2(1 - 3\,\text{tang}^2\omega),$$

$$\overline{\Omega K_2}^2 = 4R^2\sin^2\omega - 3R^2\,\text{tang}^2\omega,$$

$$\overline{\Omega O}^2 = R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{\Sigma a^2b^2},$$

d'où l'on tire

$$\overline{OK_2}^2 = \overline{\Omega K_2}^2 + \overline{O\Omega}^2,$$

et de là on conclut que :

Le point Ω *se trouve sur le cercle qui a pour diamètre* OK_2.

Par analogie, on démontre que Ω' se trouve sur la même circonférence.

La circonférence sur laquelle se trouvent Ω, Ω', K_2, O *est celle qu'on appelle* circonférence de Brocard.

3. Proposons-nous le problème suivant :

Quels sont les points tels que les droites qui joignent leurs projections sur les côtés avec les sommets du triangle soient concourantes ?

De nos formules on déduit, en indiquant par P_a, P_b,

P_e **les projections de P sur** a**,** b**,** c **respectivement**

$$BP_b = \frac{a + cq\cos B}{\sqrt{c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos b}}\,\frac{\sqrt{(1+q)(c^2q + a^2) - b^2q}}{1 + q + mq},$$

$$P_aC = \frac{am + b\cos C}{\sqrt{a^2m^2 + b^2 + 2acq\cos B}}\,\frac{\sqrt{(1+m)(a^2m + b^2) - mc^2}}{1 + m + mp},$$

$$CP_b = \frac{b + am\cos C}{\sqrt{a^2m^2 + b^2 + 2acq\cos B}}\,\frac{\sqrt{(1+m)(a^2m + b^2) - mc^2}}{1 + m\,mp},$$

$$P_bA = \frac{bp + c\cos A}{\sqrt{b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos A}}\,\frac{\sqrt{(1+p)(b^2p^2 + c^2) - a^2p}}{1 + p + pq},$$

$$AP_c = \frac{bp + c\cos A}{\sqrt{b^2p^2 + c^2 + 2bcp\cos V}}\,\frac{\sqrt{(1+p)(b^2p^2 + c^2) - a^2p}}{1 + p + pq},$$

$$P_cB = \frac{cq + a\cos B}{\sqrt{c^2q^2 + a^2 + 2acq\cos B}}\,\frac{\sqrt{(1+q)(c^2q + a^2) - b^2q}}{1 + q + mq}.$$

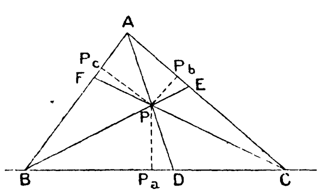
Puisque AP_a, BP_a, CP_c concourent en un point, on doit avoir

$$\overline{AP_c}.\overline{BP_a}.\overline{CP_b} = \overline{P_cB}.\overline{P_aC}.\overline{P_bA},$$

équation qui, par les formules précédentes, devient

$$(\alpha)\quad a\left(\frac{c^2}{p} - b^2p\right)(\cos B\cos C - \cos A) + b\left(\frac{a^2}{q} - c^2q\right)(\cos A\cos C - \cos B) + c\left(\frac{b^2}{m} - a^2m\right)(\cos A\cos B - \cos C) = 0,$$

et aux valeurs de m, p, q qui satisfont à cette équation correspond un point demandé.



L'équation (α) est vérifiée par $\frac{b}{a} = m$, $\frac{c}{b} = p$, $\frac{a}{c} = q$, ce qui nous donne comme point P′ le point de Gergonne.

On peut dire la même chose du point conjugué isotomique de P. Le point de Gergonne peut s'obtenir encore d'une autre manière, que nous indiquerons brièvement.

Le théorème suivant est bien connu (1) :

En joignant un point T_1 *aux sommets d'un triangle, le cercle qui passe par les trois points* T_{1a}, T_{1b}, T_{1c} *déterminés sur les côtés a, b, c par les droites* AT_1, BT_1, CT_1 *coupe les côtés en trois autres points* T_{2a}, T_{2b}, T_{2c} *tels que les droites qui les joignent aux sommets opposés sont concourantes en un point* T_2.

Nous appellerons *points de Terquem* les points T_1, T_2.

Relativement à ces points, indiquons le théorème suivant :

Si le point T_1 *est déterminé par les rapports m, p, q, le point* T_2 *est déterminé par les rapports*

$$m' = \frac{\dfrac{a^2}{1+m} - \dfrac{b^2 p}{1+p} + \dfrac{c^2 pq}{1+q}}{\dfrac{a^2}{1+m} + \dfrac{b^2 p}{1+p} - \dfrac{c^2 pq}{1+q}},$$

$$p' = \frac{\dfrac{b^2}{1+p} - \dfrac{c^2 q}{1+q} + \dfrac{a^2 mq}{1+m}}{\dfrac{b^2}{1+p} + \dfrac{c^2 q}{1+q} + \dfrac{a^2 mq}{1+m}},$$

$$q' = \frac{\dfrac{c^2}{1+q} - \dfrac{a^2 m}{1+m} + \dfrac{b^2 mp}{1+p}}{\dfrac{c^2}{1+q} + \dfrac{a^2 m}{1+m} - \dfrac{b^2 mp}{1+p}}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition.

(1) *N. A.*, p. 403; 1842.

Si l'un des points de Terquem est le barycentre, on a alors $m = p = q = 1$; et, en correspondance,

$$m' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{c \cos B}{b \cos C}, \qquad p' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{a \cos C}{c \cos A},$$

$$q' = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b \cos A}{a \cos B};$$

on voit que le second point de Terquem est l'orthocentre du triangle. Au moyen des formules établies dans les paragraphes précédents, on trouve même le cas où $m' = m$, $p' = p$, $q' = q$, ou bien le cas où les deux points de Terquem sont coïncidents, et de cette manière on a de nouveau le point de Gergonne.

4. *Surface* σ *du triangle pédal du point* P. — Par nos formules, on a

$$PD = \frac{pq\sqrt{(1+p)(c^2p+b^2) - a^2p}}{(1+p)(1+p+pq)},$$

$$PE = \frac{mq\sqrt{(1+q)(c^2q+a^2) - b^2q}}{(1+q)(1+q+mq)},$$

$$PF = \frac{mp\sqrt{(1-m)(a^2m+b^2) - c^2m}}{(1+m)(1+m+mp)};$$

$$\sin \widehat{EPD} = \sin\theta\cos(B-\varphi) + \cos\theta\sin(B-\varphi),$$

$$\sin \widehat{DPF} = \sin\xi\cos(A-\theta) + \cos\xi\sin(A-\theta),$$

$$\sin \widehat{FPE} = \sin\varphi\cos(C-\xi) + \cos\varphi\sin(C-\xi).$$

De cette manière, on connaît tous les éléments nécessaires pour le calcul de la surface σ; calcul que nous omettons, pour abréger, et qui donne la formule très simple

$$\sigma = \frac{2S}{(1+p)(1+m)(1+q)} \quad (2S = \text{surface du triangle ABC}).$$

Si le point P est le point K_n, on a

$$\sigma = \frac{2 S a^n b^n c^n}{(a^n + b^n)(a^n + c^n)(b^n + c^n)}.$$

Observons particulièrement que de cette formule on déduit que : *Les surfaces des triangles pédals* (¹) *des points de Lemoine et de Brocard sont données par l'unique formule*

$$\sigma = \frac{2 S a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}.$$

De la formule générale qui donne σ, on déduit que

La surface σ_1 du triangle pédal du point isotomique du point P *est précisément* σ.

5. *Surface* S_p *du triangle podaire du point* P. — De nos formules (A), on déduit aussi la surface du triangle podaire du point P, qui est :

$$\begin{aligned} S_p = & \frac{p S[(1+p)(b^2 p + c^2) - a^2 p] \sin^2 A}{(1 + p + pq)^2 (b^2 p^2 + c^2 + 2 bcp \cos A)} \\ & + \frac{m S[(1+m)(a^2 m + b^2) - mc^2] \sin^2 B}{(1 + m + mp)^2 (a^2 m^2 + b^2 + 2 abm \cos C)} \\ & + \frac{q S[(1+q)(c^2 q + a^2) - b^2 q] \sin^2 C}{(1 + m + mq)^2 (c^2 q^2 + a^2 + 2 acq \cos B)}. \end{aligned}$$

Si le point P est le barycentre du triangle, on a

$$S_p = \frac{S(a^2 + b^2 + c^2)}{(6R)^2}.$$

Si le point P est le point de Lemoine, on a

$$S_p = \frac{12 S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}.$$

(¹) Triangle obtenu en joignant deux à deux les pieds de trois cériennes concourantes.

6. *Remarque.* — Il faut observer que l'interprétation géométrique de quelques identités algébriques entre les m, p, q est parfois utile. Nous en donnerons un exemple : On vérifie aisément l'identité

$$\text{(I)} \qquad \frac{mp}{1+m+mp} + \frac{pq}{1+p+pq} + \frac{mq}{1+q+mq} = 1.$$

L'interprétation géométrique résultant de nos formules est la suivante :

Si trois droites tirées par les sommets d'un triangle se coupent en un même point P, *on a la relation*

$$\frac{\text{DP}}{\text{AD}} + \frac{\text{PE}}{\text{BE}} + \frac{\text{PF}}{\text{CF}} = 1.$$

De la relation (I), on déduit aussi les autres identités algébriques

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{1+m+mp} + \frac{1}{1+p+pq} + \frac{1}{1+q+mq} = 1,$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{m}{1+m+mp} + \frac{p}{1+p+pq} + \frac{q}{1+q+pq} = 1,$$

qui, sommées, donnent

$$\frac{1+m}{1+m+mp} + \frac{1+p}{1+p+pq} + \frac{1+q}{1+q+mq} = 2,$$

relation dont l'interprétation géométrique est la suivante : *Si trois droites menées par les sommets d'un triangle se coupent en un point* P, *on a :*

$$\frac{\text{AP}}{\text{AD}} + \frac{\text{BP}}{\text{BE}} + \frac{\text{CP}}{\text{CF}} = 2.$$

Comme on le voit, les trois identités (I), (II), (III) se déduisent les unes par les autres ; mais il y a plus : Si l'une de ces identités, par exemple (III), appartient au point P, alors une de celles qni restent, et en ce cas la relation (II), appartient au point conjugué isotomique de P. C'est ce que le lecteur vérifiera aisément.