NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Sur les adjointes infinitésimales d'une courbe plane

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 219-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__219_0>

[O2q]

SUR LES ADJOINTES INFINITÉSIMALES D'UNE COURBE PLANE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

Étant donnée une courbe plane (M) quelconque, on peut, d'une infinité de manières, lier à la fois à chacun de ses points M et à la tangente MT en ce point, un point M' tel que *les éléments infinitésimaux d'ordre* $n+1$ *de la courbe* (M) *dépendent de ceux d'ordre n de la courbe* (M') et, plus particulièrement, que les centres de courbure de la courbe (M) dépendent des tangentes de la courbe (M'). Nous appelons, pour cette raison, la courbe (M') une *adjointe infinitésimale* de la courbe (M).

Si l'on parvient à mettre le mode de liaison entre les centres de courbure de (M) et les tangentes de (M') sous une forme simple, il suffit de chercher les courbes (M) pour lesquelles (M') se réduit à une droite ou à un cercle pour obtenir une classe de courbes dont les centres de courbure se construisent aisément.

Cette idée se trouve appliquée dans un Mémoire que nous avons publié naguère dans l'*American Journal of Mathematics* (¹) (t. XI, p. 55, 1888; t. XIV, p. 227, 1892), où les adjointes infinitésimales considérées sont définies comme le lieu du point de rencontre M' du

(¹) *Voir* aussi notre *Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale* (nᵒˢ 266 à 269). Les courbes envisagées récemment par M. H. Brocard dans les *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége* (3ᵉ série, t. I; 1899), rentrent dans la catégorie de nos *adjointes des directions tangentielles*, lorsque le premier des pôles servant à les définir est rejeté à l'infini.

rayon vecteur OM de la courbe (M) et de la parallèle à la normale (*adjointe des directions normales*), ou à la tangente (*adjointe des directions tangentielles*), issue d'un second pôle P.

On peut rattacher au même point de vue l'étude publiée récemment, dans le présent Recueil, par M. Collignon [1], l'adjointe infinitésimale étant alors celle qu'engendre l'extrémité M′ du segment MM′ de la normale, qui est vu sous un angle constant du point T où la tangente en M rencontre une droite fixe quelconque Ox, et cette adjointe se réduisant à une droite.

Or, dans ce cas, il est bien facile d'obtenir le centre de courbure m répondant au point M, c'est-à-dire le point où MM′ touche son enveloppe. La considération des centres instantanés I et J répondant aux angles de grandeur constante MTM′ et MM′T donne, en effet, immédiatement la construction suivante :

Du point de rencontre I *de* MM′ *et de la perpendiculaire élevée en* T *à* Ox, *abaisser sur* M′T *une perpendiculaire qui coupe en* J *la normale au lieu décrit par* M′ : *le centre de courbure* m *est la projection de* J *sur* MM′.

On trouvera d'autres exemples d'adjointes infinitésimales dans diverses Notes que nous avons publiées dans les *Nouvelles Annales* (3ᵉ série, t. I, p. 40, 1883; t. VII, p. 438, 1888) et dans le *Journal de Mathématiques spéciales* (5ᵉ série, t. II, p. 25, 49, 73, 97, 121; 1888; t. IV, p. 31, 49; 1890. 6ᵉ série, t. IV, p. 3, 25; 1895). Les exemples traités géométriquement dans la première des Notes de ce dernier groupe sont dus à

(1) Même tome, p. 11.

M. Laisant qui les avait traités analytiquement en vue de ramener la construction du centre de courbure des courbes *graphiques* à celle d'une tangente (*Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XIII, p. 367; 1874).

Lorsqu'on pose

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

les formules déterminant les coordonnées x' et y' du point M' en fonction de celles x et y du point M peuvent s'écrire

$$x' = f(x, y, p), \qquad y' = \varphi(x, y, p),$$

et l'on a, en posant encore $\dfrac{dy'}{dx'} = p'$,

$$(1) \qquad p' = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} p + \dfrac{\partial\varphi}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} p - \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}}.$$

Comme, d'autre part, la dérivée $\dfrac{dp}{dx}$ est liée au rayon de courbure ρ de la courbe (M) par l'équation

$$\frac{dp}{dx} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho},$$

on voit que l'équation (1) établit un lien entre le coefficient angulaire p' de la tangente de la courbe (M') et le rayon de courbure ρ de la courbe (M).

« La méthode, dit M. Laisant en parlant de ces formules (*loc. cit.*, p. 370), peut exceptionnellement se trouver en défaut si, par suite de réductions de calcul, l'expression $\dfrac{dp}{dx}$ se trouve éliminée de l'équation (1).... Mais il n'y a que certains procédés particuliers de construction qui puissent conduire à un semblable résultat.... »

Et, parmi les exemples qu'il traite, il s'en trouve plusieurs dans ce cas. Le plus simple est celui qu'offrent les courbes parallèles. Si, en effet, le point M′ est l'extrémité d'un segment constant MM′ porté sur la normale en M, la courbe ainsi obtenue a même normale, par suite même centre de courbure que la proposée, et ne constitue, par suite, pas pour celle-ci une adjointe infinitésimale.

Il nous a paru intéressant de préciser dans quels cas une construction, faisant correspondre un point M′ au point M et à la tangente MT en ce point, fournit effectivement une adjointe infinitésimale.

L'équation (1) donne aisément la réponse à cette question. En effet, pour que p' soit indépendant de $\frac{dp}{dx}$, il faut et il suffit, d'après la forme même de cette équation, que l'on ait

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}p}{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}{\frac{\partial\varphi}{\partial p}}. \tag{2}$$

Or, le premier membre de cette dernière équation représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe que décrit le point M′ lorsque, p étant constant, on fait varier x et y, c'est-à-dire lorsque, la tangente MT restant fixe, le point M se déplace sur cette tangente; de même, le second membre représente le coefficient angulaire de la tangente à la courbe que décrit le point M′, lorsque, x et y étant constants, on fait varier p, c'est-à-dire lorsque, le point M restant fixe, la tangente MT pivote autour de ce point. De là le critérium demandé:

Une construction faisant correspondre le point M′ *au point* M *et à la tangente* MT *en ce point donne naissance à une adjointe infinitésimale si, à partir de cha-*

cune de ses positions, le point M′ *décrit deux éléments non en contact, lorsque :* 1° *on fait glisser le point* M *sur la tangente* MT *rendue fixe;* 2° *on fait tourner la tangente* MT *autour du point* M *rendu fixe.*

Ce résultat peut d'ailleurs être établi directement par le raisonnement bien simple que voici : Si la construction considérée fournit une adjointe infinitésimale, à chaque valeur du rayon de courbure en M correspond une direction différente pour la tangente en M′. Il suffit donc de s'assurer que, pour deux valeurs quelconques de ce rayon de courbure on obtient bien deux directions distinctes pour la tangente en M′. On peut, en particulier, choisir pour ce rayon de courbure une valeur infinie et une valeur nulle. A la première correspond la droite MT, à la seconde le point M considéré comme cercle de rayon nul.

On voit, en outre, que, si les éléments décrits par M′ dans ces deux cas sont en contact, leur direction commune est celle de la tangente en M′ pour une valeur quelconque du rayon de courbure en M.

L'application du critérium précédent est, en général, des plus aisées. Par exemple, dans le cas des adjointes des directions soit normales, soit tangentielles, rappelées plus haut, le premier des deux éléments considérés à partir de M′ est dirigé suivant PM′, le second suivant OM′, et ces deux éléments ne sont évidemment pas en contact; tandis que, dans le cas des courbes parallèles, signalé ci-dessus comme exemple de la circonstance contraire, le premier élément est dirigé suivant la parallèle à MT menée par M′, le second suivant le cercle de centre M et de rayon MM′, et ces deux éléments sont bien en contact.

Il faut remarquer que, si la construction fait dépendre le point M′ de la tangente MT à l'exclusion du point M, auquel cas le premier membre de (2) prend la forme $\frac{0}{0}$, le premier des deux éléments ci-dessus définis se réduit à un point, lequel peut toujours être considéré comme en contact avec toute ligne qui en est issue. Il est d'ailleurs bien facile de reconnaître *a priori* que la courbe obtenue n'est pas, en ce cas, une adjointe infinitésimale. Comme exemple d'une telle circonstance, on peut citer les polaires réciproques et les podaires.