A. Vacquant

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1899). Solution de la question de mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 179-188

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__179_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1899). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

PAR M. A. VACQUANT,
Professeur au lycée de Nancy.

1° *On considère les coniques ayant une direction fixe* D *et passant par deux points fixes* A *et* B. *Deux* *de ces coniques passent par un point donné* M *et se coupent en un nouveau point* M′ *qui est dit* associé *au point* M.

On demande d'étudier cette association et plus particulièrement :

a. De déterminer les points M *tels que les points* M′ *associés soient indéterminés;*

b. De trouver le lieu des points M *tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé.*

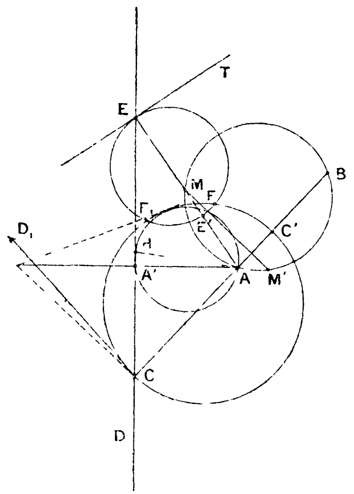
2° *Montrer que si le point* M *décrit une droite quelconque* Δ, *le point associé* M′ *décrit en général une hyperbole* Γ *dont on cherchera les asymptotes. Indiquer les régions de la droite* Δ *qui correspondent aux deux branches de l'hyperbole.*

3° *On suppose que la droite* Δ *est placée de telle sorte que la conique* Γ *devienne une parabole et l'on propose de trouver le lieu du foyer de cette parabole lorsque la droite* Δ *se déplace en satisfaisant à cette condition.*

4° *On suppose que la droite* Δ *se déplace de telle sorte que les hyperboles* Γ *correspondantes aient une asymptote commune. On demande, dans ces conditions, de déterminer la courbe enveloppe des axes de symétrie de la conique* Γ.

I. Considérons les coniques S ayant une directrice fixe D et passant par deux points fixes A et B; soient C le point de rencontre de D et AB, C′ le conjugué harmonique de C par rapport à A et B. Si F est le foyer d'une conique S, on sait que la bissectrice de l'angle AFB et celle de son supplément sont FC′ et FC ou FC et FC′; l'angle CFC′ étant droit, on voit que F se trouve, dans les deux cas, sur le cercle de diamètre CC′. De même, si AM rencontre D au point E et si E′ est le conjugué harmonique de E par rapport à A et M, le foyer d'une conique S passant par A et M se trouve sur le cercle de diamètre EE'. Ces cercles CC', EE' se coupent en deux points F, F_1 réels ou imaginaires. Donc il existe deux coniques ayant D pour directrice, pour foyer correspondant F ou F_1 et passant par A, B, M. Ces co-

Fig. 1.



niques, que je supposerai d'abord *distinctes,* se coupent en un quatrième point M'; les axes de ces coniques sont l'un parallèle, l'autre perpendiculaire à D et par suite sont respectivement parallèles; il en résulte, d'après une propriété bien connue, que les quatre points A, B, M, M' sont sur un cercle et que MM' est parallèle à la droite D_1 symétrique de AB par rapport à D.

On peut donc trouver le point M' de la façon suivante :

Par les trois points A, B, M, on fait passer un cercle; par le point M, on mène une droite parallèle à D_1 rencontrant le cercle ABM au point M′ qui sera dit *associé* au point M.

On peut encore dire : Soient AM′ parallèle à la symétrique de BM par rapport à D et BM′ parallèle à la symétrique de AM par rapport à D, les droites AM′ et BM′ ainsi obtenues se coupent en M′.

Inversement, l'associé de M′ est M. On voit que la directrice D ne sert qu'à fixer la direction D_1.

L'association ainsi définie des points M et M′ suppose que les deux coniques S et S_1 qui passent en M sont distinctes. Si elles sont *confondues*, le point M′, associé à M, est indéterminé, et le point M décrit une courbe de quatrième ordre qui se décompose en une cubique et la droite AB. Pour le voir, nous allons déterminer les points M situés sur une droite AE passant par A et rencontrant D en E. Pour un point M cherché, le cercle de diamètre EE′ est tangent en F au cercle CC′; or le cercle EE′ est tangent en E à la perpendiculaire ET à AE, autrement dit passe par deux points de cette perpendiculaire confondus avec le point E; or on sait qu'il y a deux cercles passant par deux points et tangents à un cercle; donc sur une droite quelconque AE il y a deux points M, M_1 que nous pouvons construire et autres que A. Je dis maintenant qu'il y a deux positions particulières de la droite mobile AE pour lesquelles un des deux points M, M_1 vient se confondre avec le point A. Le point M, ou M_1 ne peut venir en A que si E′ y vient aussi; le cercle de diamètre EE′ devient le cercle de diamètre EA passant par la projection A′ de A sur D; il y a donc autant de droites cherchées AE qu'il y a de cercles passant en A, A′ et tangents au cercle fixe CC′, c'est-à-dire deux; l'un de ces cercles est évidemment AA′C tangent en C au cercle CC′; l'autre, qu'on déduit immédiatement du précédent, rencontre D en un deuxième point H. On voit donc, en faisant varier la droite AE, que le lieu des points M pour lesquels les coniques S et S_1 sont confondues est une ligne du quatrième ordre, admettant un point double en A, les tangentes en ce point double étant AC et AH. On voit de même que la courbe admet un point double en B, l'une des tangentes en ce point étant BC; la tangente double AB rencontrant la courbe en *six* points appartient au lieu, ce qu'on vérifie d'ailleurs immédiatement, car si M est un point quelconque de AB, C_1 le conjugué harmonique de C par rapport à AM, le cercle de diamètre CC_1 est tangent en C au cercle fixe CC'; le foyer de la conique double correspondante est C et cette conique se décompose en la droite AB et sa symétrique par rapport à D. Le reste du lieu est une cubique passant en A et B, les tangentes en ces points étant AH et BK qu'on trouve comme AH.

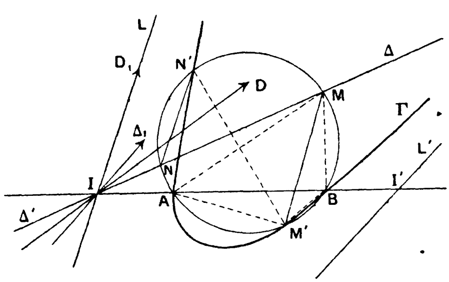
Revenons maintenant au cas général où les deux coniques S, S_1 sont distinctes et cherchons :

a. Les points M tels que les points M' associés soient indéterminés. Un point M étant choisi, les droites AM' et BM' sont déterminées en même temps que les droites BM et AM. Une de ces dernières ne peut devenir indéterminée que si M est en A ou B : si M est en A, AM est parallèle à D_1 et BM' est indéterminée; si M est en B, BM' est parallèle à D_1 et AM' est indéterminée; il y a donc deux points M, savoir A et B, donnant lieu à une infinité de points M' situés sur les parallèles menées par A et B à D_1.

b. Cherchons maintenant le lieu des points M tels que chacun d'eux soit confondu avec son associé M'; comme AM' devient AM, les droites AM et BM sont symétriques par rapport à D et, inversement, s'il en est ainsi, M' est confondu avec M; on a donc à chercher le lieu des points M tels que AM et BM soient, en direction, symétriques par rapport à D. Les faisceaux AM et BM étant homographiques, le lieu de M est une conique passant par A et B; ses directions asymptotiques sont l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à D; cette conique est donc une hyperbole équilatère; son centre est le milieu de AB, comme on le voit en achevant le parallélogramme ayant pour côtés consécutifs MA et MB. D'après la première manière de définir M′, on voit que ce lieu est le même que celui des points de contact des tangentes aux cercles passant par A et B et parallèles à D_1.

II. Si le point M décrit une droite Δ, les faisceaux AM et BM sont homographiques; les faisceaux AM′ et BM′, respectivement homographiques aux faisceaux BM et AM, sont aussi homographiques; donc le lieu de M′ est une conique Γ passant par A et B. Cherchons les directions asymptotiques de Γ : quand AM′ et BM′ sont parallèles, AM et BM sont parallèles ou confondus et inversement. Or AM et BM sont parallèles quand M est à l'infini sur Δ, alors une première direction asymptotique est la symétrique Δ_1 de Δ par rapport à D; d'autre part,

Fig. 2.



AM et BM sont confondus quand M est au point de rencontre I de AB et Δ; par suite, la deuxième direction asymptotique est la symétrique D_1 de AB par rapport à D; de plus, quand M vient en I, le point M′ étant à l'infini sur la droite MM′ de direction D_1, le point I est un point de l'asymptote de direction D_1 ([1]); on a donc une première asymptote IL parallèle à D_1; l'autre, de direction Δ_1, s'obtient d'après une propriété bien connue d'une corde AB d'une hyperbole, savoir : le segment de droite porté par AB et ayant ses extrémités sur les asymptotes a même milieu que le segment AB. On prendra donc

$$\overline{BI'} = \overline{IA}$$

et, par I′, on mènera une droite I′L′ parallèle à Δ_1.

Comme cas particulier, quand la droite Δ passe par l'un des points A, B, l'hyperbole Γ se décompose en deux droites AA′ parallèle à D_1 et BB′ parallèle à Δ_1 ; on peut dire qu'elle se réduit à ses deux asymptotes.

Le cercle ABM rencontre la droite Δ en un deuxième point N ayant pour associé N′. Les régions de Δ où doit se trouver M pour que M′ reste sur une même branche

---

([1]) Ceci prouve à nouveau que D_1 est une direction asymptotique mais non que IL est l'asymptote correspondante. Pour prouver que IL est l'asymptote de direction D_1 il faut observer qu'à deux droites Δ et Δ' il correspond deux coniques Γ et Γ' ayant quatre points communs, dont trois, A, B et le point à l'infini sur D_1, sont fixes; de sorte que le quatrième point correspond à l'intersection de Δ et de Δ'. Supposant alors que Δ' soit l'asymptote en question, la conique Γ' se décompose en deux droites, savoir : Δ' et AB. Les points communs à Γ et à Γ' sont A, B et le point à l'infini sur D_1 compté deux fois, puisque Δ' est tangente à Γ en ce point. Il en résulte que le point à l'infini sur D_1 correspond au point de rencontre de Δ et de Δ'; mais le point associé au point à l'infini sur D_1 est indéterminé sur AB; donc Δ et Δ' se coupent sur AB et l'asymptote cherchée est bien ID_1. (X. A.)

de Γ sont les demi-droites $I\Delta$, $I\Delta'$. Il y a deux cas à examiner : le point I est *extérieur* au segment AB ou *appartient* à ce segment.

Quand I est extérieur au segment AB, les points M et N décrivent en même temps les demi-droites $I\Delta$, $I\Delta'$ en vertu de la relation

$$IM.IN = IA.IB:$$

les points M′, N′ restent sur la même branche ; en effet, la corde M′N′ ne rencontre pas l'asymptote IL de direction D_1 et par suite ne rencontre aucune asymptote.

Quand I appartient au segment AB, les points M et N sont l'un sur $I\Delta$, l'autre sur $I\Delta'$; les points M′ et N′ sont sur des branches différentes, car la corde M′N′ de Γ rencontre les deux asymptotes, puisqu'elle rencontre évidemment l'asymptote IL de direction D_1. Dans les deux cas, on voit que les régions cherchées sont $I\Delta$ et $I\Delta'$.

III. Pour que la conique Γ soit une parabole, il faut et il suffit que ses deux directions asymptotiques soient les mêmes, c'est-à-dire Δ_1 parallèle à D_1 et par suite Δ parallèle à AB. La parabole relative à une droite Δ parallèle à AB a son axe parallèle à D_1, sa directrice D′ est perpendiculaire à D_1. Soient F le foyer de cette parabole, AA′ et BB′ les perpendiculaires abaissées de A et B sur la directrice D′. On a

$$AF = AA', \qquad BF = BB'$$

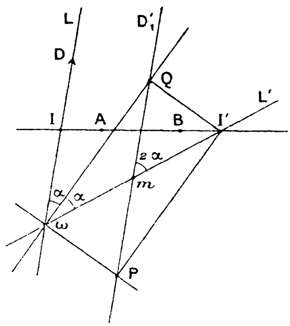
et, par suite,

$$FB - FA = BB' - AA' = \text{const.} = \text{la projection de AB sur } D_1.$$

De là résulte que si Δ se déplace parallèlement à AB, le lieu du foyer F de la parabole Γ est une hyperbole ayant pour foyers A et B et pour longueur d'axe transverse la projection de AB sur D_1.

IV. Si, à deux droites Δ, correspondent deux hyperboles Γ ayant une asymptote commune, celle-ci est nécessairement parallèle à D_1, direction asymptotique commune aux deux hyperboles, car, autrement, les deux hyperboles ayant deux points communs A, B auraient

Fig. 3.



leurs deux asymptotes communes et coïncideraient; les droites Δ correspondantes coïncideraient également. On conclut de là et aussi de ce qui précède (III) que les droites Δ donnant lieu à des hyperboles ayant une asymptote commune doivent rencontrer la droite indéfinie AB en un même point I et que l'asymptote commune est IL parallèle à D_1. Les asymptotes IL et I'L' d'une hyperbole Γ se coupent au centre ω de Γ qui a pour axes de symétrie les bissectrices ωP, ωQ des angles formés par les asymptotes. Le milieu m de I'ω décrit une droite D'_1 parallèle à IL, équidistante de I' et IL, rencontrant les axes en P et Q. Le quadrilatère I'PωQ est un rectangle; en effet, les triangles ωmP, ωmQ sont isoscèles, par suite

$$m\mathrm{P} = m\mathrm{Q} = m\omega;$$

les diagonales du quadrilatère se coupent en parties égales; c'est donc un parallélogramme qui est rectangle, puisque l'angle $P\omega Q$ est droit. L'enveloppe des axes ωP, ωQ est donc une parabole ayant pour foyer I', pour tangente au sommet D'_1, pour directrice IL.