NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. LEFEBVRE

Note rectificative

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 19 (1900), p. 177-179

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1900_3_19__177_1>

[P1a]

NOTE RECTIFICATIVE;

PAR M. P. LEFEBVRE.

Dans une Note insérée au numéro de novembre des *Nouvelles Annales* (p. 528; 1899), j'ai indiqué l'existence d'une division de n points sur une droite généralisant la division harmonique. M_1, M_2, M_3, ..., M_k,

$M_{k+1}, \ldots, M_n$ étant ces n points, il existe entre deux de ces points, M_k, M_{k+1}, et deux points fixes imaginaires de la droite, E, F, la relation

$$\frac{M_{k+1}E}{M_{k+1}F} : \frac{M_k E}{M_k F} = K,$$

K étant une racine n^{ieme} primitive de l'unité.

La division harmonique correspondrait au cas où $n = 1$, $K = \pm i$.

Une inadvertance m'a fait dire que « quatre des n points ont pour rapport anharmonique une racine n^{ieme} de l'unité, dans les mêmes conditions où les quatre points d'une division harmonique ont pour rapport anharmonique -1 ». Il est clair que le rapport anharmonique de 4 des n points est toujours réel.

Le rapport anharmonique de 4 des n points peut toujours être mis sous la forme

$$H_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n}(a+b)\sin\frac{\pi}{n}(b+c)}{\sin\frac{\pi}{n}a\sin\frac{\pi}{n}c},$$

a, b, c étant trois nombres entiers positifs ou négatifs plus petits que n en valeur absolue, et tels qu'aucun des nombres $a+b$, $b+c$ et $a+b+c$ ne soit égal à n.

Inversement toute expression de cette forme peut être regardée comme rapport anharmonique de 4 des n points. C'est le cas pour $2\cos\frac{p\pi}{n}$ et $4\cos^2\frac{p\pi}{n}$ quel que soit le nombre entier p. Toutefois, l'expression ne devra, bien entendu, être ni nulle, ni infinie, ni égale à 1.

H_n n'admet jamais la valeur -1 si n impair, l'admet toujours si n pair. A cette valeur correspondent des groupes de 4 des n points formant division harmonique.

Si n n'est pas premier, H_n admet évidemment toutes les valeurs admises par les expressions H_α, H_β, H_γ, ...

correspondant à ses facteurs α, β, γ, ... autres que 2 et 3. Il y aurait donc lieu de distinguer ce que l'on pourrait appeler les valeurs primitives de H_n.

Si n est premier, le nombre de valeurs distinctes admises par H_n est égal au sextuple du nombre pyramidal de côté $\frac{n-3}{2}$; c'est donc $\frac{(n-3)(n^2-1)}{8}$. Elles correspondent 6 par 6 aux divers groupes que l'on peut former avec 4 des n points (4 points donneront 6 rapports anharmoniques).

Pour $n=5$, on trouve un groupe de valeurs; ce sont $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Pour $n=6$, trois groupes de valeurs : -1, 2, $\frac{1}{2}$; -2, $-\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$; -3, $-\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$.

Pour $n=7$, quatre groupes de valeurs; il suffira d'en citer une de chacun de ces groupes $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{4\pi}{7}$, $2\cos\frac{6\pi}{7}$ et $2\cos\frac{\pi}{7}$. (Le dernier groupe contient à la fois $2\cos\frac{\pi}{7}$, $2\cos\frac{3\pi}{7}$, $2\cos\frac{5\pi}{7}$ et leurs inverses; l'équation du troisième degré qui donne $2\cos\frac{(2k+1)\pi}{7}$ se transformant en elle-même en remplaçant x par $\frac{1}{1-x}$.)