Nouvelles annales de mathématiques

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de novembre 1898. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 86-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__86_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1898. — COMPOSITIONS.

Caen.

ÉLÉMENTS GÉNÉRAUX DE MATHÉMATIQUES.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Soit* C *la courbe définie en coordonnées rectangulaires par les équations*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \frac{2}{3}t^3;$$

montrer que C *est une hélice et déterminer la section droite du cylindre dont elle est une géodésique. Mon-*

trer que les développantes de C sont planes et construire celle qui part de C à l'origine des coordonnées.

On trouve que l'arc s compté à partir de l'origine est égal à $x + z$; C est une hélice : la section droite du cylindre, située dans le plan $x + z = 0$ est définie par les relations

$$y = t^2, \qquad z_1 = \frac{2t^3 - 3t}{3\sqrt{2}};$$

pour la développante partant de l'origine, on a

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = \frac{t^2(2t^2 - 3)}{3 + 6t^2}, \qquad Z_1 = -\frac{4t^3\sqrt{2}}{3 + 6t^2}.$$

Épreuve pratique. — *On suppose que, dans l'orbite apparente du Soleil, on ait* $e = \frac{1}{60}$, $\varpi = 280^\circ$, *et l'on considère la position S du Soleil* $\frac{1}{4}$ *d'année sidérale après son passage au périgée. Montrer que* u *est comprise entre* $\frac{\pi}{2} + e$ *et* $\frac{\pi}{2} + e - e^3$; *la valeur* $\frac{\pi}{2} + e$ *est approchée à moins de* $1''$: *en l'acceptant pour* u, *calculer la longitude de* S.

On a

$$u - e \sin u = \frac{\pi}{2}.$$

Soit

$$u = \frac{\pi}{2} + v; \qquad v = e \cos v = e\left(1 - \frac{\theta v^2}{2}\right) = e\left(1 - \frac{\theta' e^2}{2}\right),$$

et l'on achève aisément le calcul.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Soit* $f(x, y, u)$ *une fonction de trois variables dont on regarde la dernière* u *comme fonction des deux autres.*

Formant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ *et regardant dans son expression* x, y, u, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ *comme des variables indépendantes, on propose de déterminer* f *de sorte que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ *soit de la forme*

$$\varphi(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\varphi^2(x,y,u)\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

On trouve

$$\varphi=\frac{1}{C-x-y-u},$$
$$f=F(x)+F_1(y)-\log(C-x-y-u).$$

II. *Une surface* S *a pour équation, en coordonnées rectangulaires,*

$$(ay+bz+c)x^2+(a'y+b'z+c')(y^2-2mz)=0,$$

m étant une constante donnée, a, b, c, a', b', c' six paramètres indéterminés. Former l'expression du rayon de courbure d'une section normale de S *en un point de la parabole $x=0$, $y^2=2mz$. Déterminer a, b, c, a', b', c' de sorte que tous les points de la parabole soient des ombilics.*

La méthode ordinaire donne

$$\frac{1}{R}=\frac{m^2}{\sqrt{y^2+m^2}}\,\frac{(by^2+2may+c)dx^2+(b'y^2+2ma'y+c')dy^2}{(b'y^2+2ma'y+c')[m^2dx^2+(y^2+m^2)dy^2]}.$$

Pour que tous les points de la parabole soient des ombilics, R doit être indépendant de $\dfrac{dy}{dx}$, quel que soit y. On trouve

$$a=b=a'=0,\qquad b'=\frac{2c}{m},\qquad c'=c.$$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

qui se réduit à $y^{\frac{3}{2}}$ *pour* $x = 1$,

$$u = \frac{27}{8}(x-1)^3 + \frac{9}{4}(x-1)y + \frac{1}{8}[9(x-1)^2 + 4y]^{\frac{3}{2}}.$$

Mécanique.

Épreuve écrite. — I. *Un plan* P *glisse sur un plan fixe de manière qu'un de ses points* A *parcoure avec une vitesse constante une circonférence de centre* O *et de rayon* R, *tandis qu'un second point* A′ *du plan* P *demeure sur une circonférence de centre* O′ *et de rayon* R : *les droites* AA′, OO′ *ont une même longueur* 2R, *mais ne sont pas parallèles.*

Construire, pour une position quelconque du plan P, *le centre instantané de rotation et le centre des accélérations.*

On se rappellera que ce dernier est à la rencontre du cercle des inflexions et d'un cercle orthogonal qui passe par A, dont le $\frac{dv}{dt}$ est nul.

II. *Une plaque carrée homogène* OPQR, *soustraite à l'action de toute force extérieure, peut tourner autour du sommet fixe* O : *le côté est égal à* 2, *la masse à* 3. *On considère trois axes liés à la plaque,* Ox *suivant la diagonale* OQ, Oy *parallèle à* PR, Oz *normal à la plaque. Déterminer le mouvement de cette plaque en supposant qu'à l'instant initial elle est animée d'une rotation instantanée dont les composantes sont* $p_0 = 2\alpha$, $q_0 = 0$, $r_0 = \alpha\sqrt{3}$.

On est dans le cas singulier où la distance du point fixe au plan de l'herpolhodie est égale au demi-axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie. Le problème est connu et j'écrirai seulement les deux formules

$$q = 2\alpha \operatorname{tang hyp} \alpha t\sqrt{3},$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} + 2\alpha t + \operatorname{arc tang} \frac{49(e^{2\alpha t\sqrt{3}} - 1)}{8\sqrt{3} + 94 - 98e^{2\alpha t\sqrt{3}}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point intérieur ou extérieur, l'attraction étant réciproque à la quatrième puissance de la distance.*

Point intérieur : $\frac{2}{3}\frac{f\mathrm{M}x}{\mathrm{R}(\mathrm{R}^2 - x^2)^2}$;

Point extérieur : $-\frac{f\mathrm{M}(3\mathrm{R}^2 - x^2)}{3x^2(\mathrm{R}^2 - x^2)^2}$.

Grenoble.

Calcul différentiel et intégral.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Plan tangent, lignes de courbure, lignes asymptotiques de l'hélicoïde gauche à plan directeur.*

Lieu des points de la surface pour lesquels le plan tangent est parallèle à une droite donnée.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Équation générale des courbes qui coupent sous un angle donné les lemniscates définies par l'équation* $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, *dans laquelle a désigne un paramètre variable. Montrer que les courbes obtenues sont encore des lemniscates.*

Cas particulier des trajectoires orthogonales.

Mécanique.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un point matériel pesant se meut sans frottement sur un cylindre parabolique* *dont l'équation par rapport à trois axes rectangulaires fixes est* $y^2 - 2px = 0$.

On donne les cosinus directeurs α, β, γ *de la direction de la pesanteur, les coordonnées* x_0, y_0 *de la position initiale du point supposée dans le plan* xy *et les composantes* a, b, c *de la vitesse initiale.*

On discutera les circonstances générales du mouvement du point et en particulier de sa projection sur le plan xy, *on calculera la réaction du cylindre quand les données sont quelconques, et l'on considérera en particulier le cas où l'on aurait*

$$\beta = 0, \qquad a^2 + b^2 - 2g\alpha x_0 - g\alpha p = 0.$$

Épreuve pratique. — *Calculer les moments d'inertie d'un cylindre droit, homogène, de révolution :* 1° *Par rapport à une génératrice ;* 2° *Par rapport à un diamètre de sa base.*

Trouver quel doit être le rapport de la hauteur h *du cylindre au rayon* r *de sa base pour que les deux pendules composés obtenus en faisant osciller le cylindre autour d'une génératrice et d'un diamètre de sa base (ces deux axes étant supposés rendus horizontaux) aient même longueur de pendule simple synchrone.*

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Étant admis que la surface mathématique de la Terre est un ellipsoïde de révolution, on demande :*

1° *De calculer, pour un point de latitude* λ, *les rayons principaux de courbure de cet ellipsoïde ;*

2° *D'exprimer, en fonction des latitudes extrêmes, la longueur d'un arc de méridien. Application au* *quart du méridien, à l'arc de* un *degré d'une latitude moyenne donnée, et, enfin, à la détermination des éléments de l'ellipsoïde terrestre à l'aide des longueurs de divers arcs de méridien.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Détermination de la déclinaison d'une étoile par la durée* T *de sa course au-dessus de l'horizon d'un lieu de latitude connue, calcul de l'azimut du lever de l'étoile.*

Variations de l'azimut et de la déclinaison correspondant à un accroissement θ *de* T.

Données numériques :

$$T = 9^h 40^m, \qquad \theta = 1^s, \qquad \lambda = 45^\circ 11' 12''.$$