F.-J. VAES

Solution graphique de *n* équations linéaires avec *n* variables

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 74-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__74_1>

[A2a]

SOLUTION GRAPHIQUE DE n ÉQUATIONS LINÉAIRES AVEC n VARIABLES;

PAR M. F.-J. VAES.

La solution suivante est très simple et est applicable à toute valeur de n.

Soit donné le système :

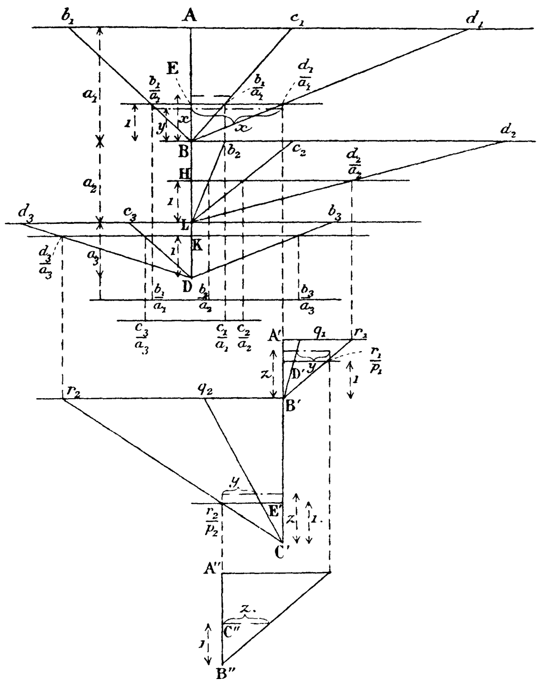
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1,$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2,$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3;$$

prenons (*fig.* 1) $AB = a_1$, $BE = 1$, traçons par E et A des perpendiculaires sur AB, mesurons sur la droite pas-

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.



sant par A des longueurs $= b_1, c_1, d_1$ à partir de A, et en ayant égard au signe, et joignons avec B les points obtenus; alors sur la droite qui passe par E on obtiendra des longueurs $\frac{b_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_1}, \frac{d_1}{a_1}$.

En agissant de même pour a_2 et a_3, on obtiendra des longueurs $\frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$, comme l'indique la *fig.* 1.

Les équations peuvent s'écrire

$$\frac{d_1}{a_1} = x - \frac{b_1}{a_1}y + \frac{c_1}{a_1}z, \qquad \ldots,$$

d'où résulte

$$\frac{d_2}{a_2} - \frac{d_1}{a_1} = \left(\frac{b_2}{a_2} + \frac{b_1}{a_1}\right) y + \left(\frac{c_2}{a_2} - \frac{c_1}{a_1}\right) z$$

et

$$-\frac{d_3}{a_3} - \frac{d_1}{a_1} = \left(\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_1}{a_1}\right) y - \left(\frac{c_3}{a_3} + \frac{c_1}{a_1}\right) z,$$

relations dans lesquelles x ne se trouve plus.

Écrivons pour plus de simplicité

$$r_1 = p_1 y + q_1 z, \qquad -r_2 = p_2 y - q_2 z:$$

les valeurs de r_1, p_1, ..., peuvent être mesurées directement sur la *fig.* 1.

Prenons (*fig.* 2) $A'B' = p_1$, $A'q_1(-A'B') = q_1$, $A'r_1 = r_1$, $B'D' = 1$; alors nous obtiendrons sur la perpendiculaire par D' sur $B'D'$ des longueurs $\frac{r_1}{p_1}$ et $\frac{q_1}{p_1}$.

Faisons $B'C' = p_2$, $C'E' = 1$ et nous trouverons des longueurs $\frac{r_2}{p_2}$ et $\frac{q_2}{p_2}$.

Puisque

$$\frac{r_1}{p_1} = y + \frac{q_1}{p_1} z \qquad \text{et} \qquad -\frac{r_2}{p_2} = y - \frac{q_2}{p_2} z,$$

il en résulte

$$\frac{r_2}{p_2} + \frac{r_1}{p_1} = \left(\frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}\right) z,$$

relation d'où z se tire par le moyen indiqué dans la *fig.* 3, où $A''B'' = \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}$, $B''C'' = 1$.

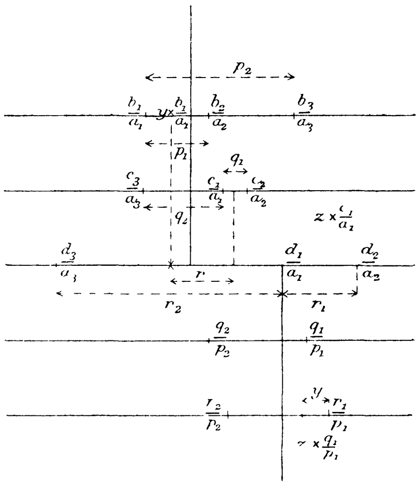
z étant trouvée, nous pouvons prendre sur $B'A'$ une longueur $= z$, et tracer par le point obtenu une perpendiculaire sur $B'A'$. A droite de $B'A'$ nous trouvons une longueur $z \times \frac{q_1}{p_1}$ laquelle peut être soustraite de la longueur $\frac{r_1}{p_1}$, ce qui donne la valeur de y.

Comme moyen de contrôle, nous pouvons aussi chercher y dans la partie inférieure de la *fig.* 2, où

$$y = -\left(\frac{r_2}{p_2} - z \times \frac{q_2}{p_2}\right).$$

Mesurons les valeurs de y et de z sur BA dans la *fig.* 1; alors nous aurons sur les perpendiculaires

Fig. 4.



sur BA, passant par les points obtenus, des longueurs $z \times \frac{c_1}{a_1}$ et $y \times \frac{b_1}{a_1}$, tandis que nous avons déjà la longueur $\frac{d_1}{a_1}$. Nous pouvons donc trouver sans peine

$$x = \frac{d_1}{a_1} + y \times \frac{b_1}{a_1} - z \times \frac{c_1}{a_1}.$$

Comme moyen de contrôle nous pouvons chercher x aussi dans l'une des deux autres parties de la *fig.* 1.

Il est évident que nous avons suivi totalement l'élimination algébrique par addition et soustraction.

Les figures et leurs parties sont placées l'une sous l'autre de la même manière que dans la solution algébrique. Il va sans dire que les figures peuvent être placées autrement l'une par rapport à l'autre, par exemple de manière que les droites BA, CB, DC coïncident, à la condition que la clarté n'en souffre pas. Dans la *fig.* 1 les proportions $\frac{b_1}{a_1}$, ... ont été transportées sur une seule droite, de même pour $\frac{c_1}{a_1}$, ...

En plaçant la droite A′C′ comme les figures l'indiquent, nous pouvons déterminer directement r_1 et r_2. De même pour la position de A″B″, indiquée dans la *fig.* 3, nous avons trouvé la valeur de $\frac{r_2}{p_2} + \frac{r_1}{p_1}$. Pour un système de n équations nous aurons n figures. Chacune des variables se trouvera dans la figure qui sert à l'élimination de cette variable.

Évidemment, il n'est pas nécessaire de faire

$$BE = CH = \ldots = 1:$$

une longueur quelconque l suffira. Seulement dans la dernière figure, dans laquelle on trouve la première variable, nous sommes obligés de faire usage de l'unité.

La solution graphique peut rendre des services importants dans quelques problèmes techniques, tels que :

Le calcul des courants dans les diverses parties d'un réseau de distribution électrique;

Le calcul de la pression de la vapeur dans le récepteur d'une machine compound;

Le calcul des tensions dans les diverses parties d'une construction.

Il peut arriver que l'une ou l'autre des équations ne soit pas propre à être construite, par exemple, quand d_1, d_2 et d_3 sont très grandes par rapport à a_1, ..., b_1, ..., c_1, ...

Dans ce cas les équations doivent être changées d'une manière quelconque, par exemple en posant $x = mx_1$, $y = my_1$, $z = mz_1$, où m est une constante; une méthode générale ne peut pas être donnée.

La solution peut être beaucoup simplifiée, à l'aide d'une règle à glissière. Car alors nous pouvons facilement calculer $\frac{b_1}{a_1}, \ldots, \frac{c_1}{a_1}, \ldots, \frac{d_1}{a_1}, \ldots$ Plaçons ces valeurs à l'aide du compas sur des droites parallèles; nous pouvons mesurer $p_1, q_1, \ldots$, et calculer $\frac{q_1}{p_1}, \ldots, \frac{r_1}{p_1}, \ldots$, qui peuvent être placées sur d'autres droites.

Alors z se trouve exprimé par $\left(\frac{r_2}{p_2} + \frac{r_1}{p_1}\right) : \left(\frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}\right)$, tandis que nous pouvons calculer avec la règle $z \times \frac{q_1}{p_1}$ pour trouver y, et $z \times \frac{c_1}{a_1}$, $y \times \frac{b_1}{a_1}$, pour obtenir x.

En ce cas la solution diffère de la solution algébrique, seulement en ce que l'on ne fait plus des additions ou des soustractions sur des nombres, mais que l'on fait exclusivement usage de la règle et du compas ; il en résulte que le calcul s'effectue plus vite et plus sommairement.