Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Sur des angles résultants

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 407-419

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__407_1>

[B12d]

SUR DES ANGLES RÉSULTANTS;

PAR M. G. FONTENÉ.

Le calcul des quaternions comprend celui des quantités complexes; mais, comme nous interprétons $a + bi$ dans un plan qui a deux dimensions, et $a + bi + cj + dk$ dans un espace qui n'en a que trois, la théorie géométrique qui correspond aux quaternions ne comprend pas celle qui correspond aux quantités complexes. En conséquence, la formule de Bellavitis pour le quadrangle plan quelconque

$$\mathrm{DA} \times \mathrm{BC} + \mathrm{DB} \times \mathrm{CA} + \mathrm{DC} \times \mathrm{AB} = 0$$

donne un théorème dont l'énoncé géométrique ne ressemble nullement à l'énoncé du théorème auquel conduit l'étude du premier membre de cette formule lorsque ABCD est un tétraèdre, et ce dernier théorème n'a même aucun sens pour le quadrangle plan (*Nouvelles Annales*, p. 340, question 1801; 1898); d'autre part, le théorème plan qui résulte de la formule de Bellavitis a son analogue dans l'espace, comme on le verra par ce qui suit.

I.

1. *Définition.* — Dans l'espace, l'angle résultant de deux angles (a, b) et (c, d), dont les côtés sont dirigés, est l'angle (e, f) obtenu en amenant ces angles, par glissement dans leurs plans respectifs, le premier dans la position (e, ω), le second dans la position (ω, f), ω étant l'intersection des deux plans prise dans un sens arbitraire si l'on a égard seulement à la grandeur de l'angle (ef), et non à la direction de son plan comme dans la théorie des vecteurs; on peut écrire

$$\mathfrak{R} = [(a, b) + (c, d)],$$

le crochet indiquant un angle résultant; les plans m et n étant orientés, on a

$$\cos\mathfrak{R} = \cos\widehat{ab}.\cos\widehat{cd} - \sin\widehat{ab}.\sin\widehat{cd} \times \cos\widehat{mn}.$$

Théorème I. — *Dans un tétraèdre* ABCD, *la notation* AB *ou* BA *(indifféremment) désignant la droite dirigée qui porte l'arête* AB, *les plans orientés des faces étant* a, b, c, d, *les dièdres étant évalués avec signes autour des arêtes dirigées, si l'on considère* DA *et* BC, DB *et* CA, DC *et* AB, *et si l'on prend avec des signes convenables les angles résultants*

$$(1)\quad \begin{cases} L = [(DB, DC) - (AC, AB)] = [(BD, BA) + (CA, CD)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

construits avec les angles des directions positives des arêtes non opposées, ces angles sont ceux des directions positives des côtés d'un triangle LMN, *et les côtés* $\overline{MN}$, $\overline{NL}$, $\overline{LM}$ *de ce triangle sont proportionnels aux* *produits*

$$(2)\qquad l = \overline{DA} \times \overline{BC}, \qquad m = \overline{DB} \times \overline{CA}, \qquad n = \overline{DC} \times \overline{AB},$$

ou encore aux produits

$$(2')\qquad \lambda = \sin\widehat{da} \times \sin\widehat{bc}, \qquad \mu = \sin\widehat{db} \times \sin\widehat{ca}, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} L + M - N = 0, \\ \dfrac{l}{\sin L} = \dfrac{m}{\sin M} = \dfrac{n}{\sin N}, \\ \dfrac{\lambda}{\sin L} = \dfrac{\mu}{\sin M} = \dfrac{\nu}{\sin N}, \end{array}\right.$$

ou encore

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} l^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos L, & \ldots, \\ \lambda^2 = \mu^2 + \nu^2 + 2\mu\nu\cos L, & \ldots. \end{array}\right.$$

Dans la formule (1), la seconde expression de L est construite avec BC, DA, comme la première l'est avec DA, BC. Ce théorème sera démontré.

2. Si les quatre plans a, b, c, d passent par un même point S, en prenant les quantités λ, μ, ν, on a un théorème sur l'angle tétraèdre complet, ou encore un théorème sur le quadrilatère sphérique complet; comme l'arête AB du tétraèdre, tant qu'il existe, est l'intersection des plans c et d, on devra écrire, pour la formule (1),

$$L = [(ac, ab) + (db, dc)] \quad \text{ou} \quad L = [(db, dc) + (ac, ab)],$$

l'ordre étant indifférent au point de vue où l'on se place ici. Nous énoncerons le théorème sur la sphère.

Définition. — Sur la sphère, l'arc résultant de deux arcs de grands cercles AB et CD est l'arc de grand cercle EF obtenu en amenant ces arcs *par glissement* *sur les grands cercles qui les portent*, le premier dans la position EO, le second dans la position OF, le point O étant l'un quelconque des deux points d'intersection de ces grands cercles.

THÉORÈME II. — *Étant donné un quadrilatère sphérique complet dont les côtés sont portés par les quatre grands cercles a, b, c, d, si l'on désigne par (db, dc), par exemple, le côté situé sur le grand cercle d et compris entre les grands cercles b et c, et si l'on prend avec des signes convenables les arcs résultants indiqués par les formules*

$$L = [(db, dc) + (ac, ab)] = [(bd, ba) + (ca, cd)],$$

on a les formules (3) *et* (4), *avec les quantités* λ, μ, ν *définies par les formules* (2′) *et qui sont ici des produits de sinus d'angles sur la sphère.*

3. Le théorème sur l'angle tétraèdre complet donnerait un théorème corrélatif sur un système de quatre droites issues d'un point, figure que l'on peut appeler un *tétraode;* sur la sphère, on a un théorème concernant le quadrangle sphérique, et c'est celui-ci que nous énoncerons.

Définition. — Sur la sphère, l'angle résultant de deux angles donnés (a, b) et (c, d) est l'angle (e, f) obtenu en amenant ces angles *par rotation autour de leurs sommets respectifs*, le premier dans la position (e, ω), le second dans la position (ω, f), ω étant le grand cercle qui passe par les deux sommets.

THÉORÈME III. — *Étant donné un quadrangle sphérique* A, B, C, D, *si l'on prend avec des signes convenables les angles résultants*

$$L = [(DB, DC) + (AC, AB)] = [(BD, BA) + (CA, CD)], \qquad \ldots,$$

ces angles sont ceux des directions positives des côtés d'un triangle plan LMN, *et les côtés* $\overline{\mathrm{MN}}$, $\overline{\mathrm{NL}}$, $\overline{\mathrm{LM}}$ *de ce triangle sont proportionnels aux produits*

$$l = \sin \mathrm{DA} \times \sin \mathrm{BC}, \qquad m = \sin \mathrm{DB} \times \sin \mathrm{CA}, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'on a les formules (3) *et* (4) *avec les quantités* l, m, n *définies par les formules* (2).

4. On a en particulier ceci pour un quadrilatère sphérique dans lequel a, b, c concourent en D, ou un quadrangle sphérique dans lequel A, B, C sont sur un même grand cercle d.

THÉORÈME IV. — *Si l'on considère sur une sphère trois points* A, B, C *sur un grand cercle* d, *et si on les joint à un point* D *de la sphère par trois arcs de grands cercles* a, b, c, *on a*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sin \mathrm{DA} \times \sin \mathrm{BC}}{\sin bc} = \frac{\sin \mathrm{DB} \times \sin \mathrm{CA}}{\sin ca} = \ldots, \\ &\frac{\sin da \times \sin bc}{\sin \mathrm{BC}} = \frac{\sin db \times \sin ca}{\sin \mathrm{CA}} = \ldots, \end{aligned}\right.$$

et des formules, analogues aux formules (4), *que nous n'écrirons pas.*

5. Si la sphère dégénère en un plan, on a d'abord le théorème II pour un quadrilatère plan, avec des segments résultants L, M, N dont la somme est nulle quand on les prend avec des signes convenables, et qui sont proportionnels aux quantités λ, μ, ν. On a ensuite le théorème III pour un quadrangle plan, avec $l = \mathrm{DA} \times \mathrm{BC}$, ..., les angles L, M, N étant ici des sommes d'angles, puisque la figure est plane; nous reviendrons sur ce théorème.

En ce qui concerne les faits du n° 4, nous dirons :

Étant donnés trois points A, B, C *en ligne droite et un point* D *extérieur, si l'on écrit*

$$\frac{\overline{BC}}{p} = \frac{\overline{CA}}{q} = \frac{\overline{AB}}{r},$$

on a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{p.\overline{DA}}{\sin(DB, DC)} = \dfrac{q.\overline{DB}}{\sin(DC, DA)} = \dfrac{r.\overline{DC}}{\sin(DA, DB)}, \\ (DB, DC) + (DC, DA) + (DA, DB) = 0, \end{array}\right.$$

comme il est facile de le voir directement; *on a donc aussi*

$$p^2.\overline{DA}^2 = q^2.\overline{DB}^2 + r^2.\overline{DC}^2 + 2qr.\overline{DB}.\overline{DC} \times \cos(DB, DC), \qquad \ldots;$$

ces formules se rattachent au théorème de Statique connu sous le nom de *théorème de Leibnitz;* et il suit de là que l'on aurait la formule qui exprime $p^2.\overline{DA}^2$ en considérant le triangle DBC comme défini par (DB, DC), $\overline{DB}$, $\overline{DC}$, en regardant A comme un barycentre, et en appliquant le théorème de Stewart.

6. *Démonstration.* — On pourrait démontrer le théorème II pour un angle tétraèdre, ce qui donnerait le théorème I avec λ, μ, ν; on sait d'ailleurs que, dans un tétraèdre, les quantités l, m, n sont proportionnelles aux quantités λ, μ, ν. Nous suivrons une autre marche : nous démontrerons le théorème III pour un quadrangle plan, et nous en déduirons le théorème I; nous remarquerons, à ce propos, que si les quatre points A, B, C, D du théorème I sont dans un même plan, on obtient le théorème III pour un quadrangle plan.

Soit donc A, B, C, D un quadrangle plan. Si l'on prend une direction origine $x'x$, et si l'on pose (théorie des équipollences)

$$\overline{AB} = \overline{AB}[\cos(x, AB) + i\sin(x, AB)], \qquad \ldots,$$

comme on a, avec l'origine D, $\overline{\overline{BC}} = \overline{\overline{DC}} - \overline{\overline{DB}}, \ldots,$ l'identité d'Euler donne la formule connue

$$\overline{\overline{DA}}.\overline{\overline{BC}} + \overline{\overline{DB}}.\overline{\overline{CA}} + \overline{\overline{DC}}.\overline{\overline{AB}} = 0.$$

Bellavitis, qui a donné cette équipollence, n'en a développé les conséquences que dans des cas particuliers; d'une manière générale on a

$$\overline{\overline{DA}}.\overline{\overline{BC}} = \overline{DA}.\overline{BC}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad \ldots,$$

les arguments α, β, γ étant respectivement

$$(x, DA) + (x, BC), \quad (x, DB) + (x, CA), \quad (x, DC) + (x, AB);$$

les vecteurs $\dfrac{\overline{DA}.\overline{BC}}{k}$, $\dfrac{\overline{DB}.\overline{CA}}{k}$, $\dfrac{\overline{DC}.\overline{AB}}{k}$ font donc entre eux les angles

$$(DB, DC) + (AC, AB \quad \text{ou} \quad (BD, BA) + (CA, CD), \qquad \ldots,$$

et comme leur somme est nulle, on a ce théorème que l'on peut regarder comme une extension du théorème de Ptolémée : *Dans un quadrangle plan, les produits*

$$l = \overline{DA} \times \overline{BC}, \qquad m = \overline{DB} \times \overline{CA}, \qquad n = \overline{DC} \times \overline{AB}$$

sont proportionnels aux côtés $\overline{MN}$, $\overline{NL}$, $\overline{LM}$ *d'un triangle* LMN *dans lequel les angles des directions positives des côtés sont*

$$L = \widehat{DB, DC} + \widehat{AC, AB} = \widehat{BD, BA} + \widehat{CA, CD}, \qquad \ldots,$$

de sorte que l'on a les formules (3) *et* (4).

Soit alors un tétraèdre ABCD : on veut démontrer

$$\overline{DA}^2 \times \overline{BC}^2 = \overline{DB}^2 \times \overline{CA}^2 \times \overline{DC}^2 \times \overline{AB}^2$$
$$+ 2\,\overline{DB}.\overline{DC} \times \overline{CA}.\overline{AB} \times \cos L,$$

L étant l'angle résultant donné par la formule (1); or, en menant la hauteur DH, on a dans le quadrangle HABC

$$\overline{HA}^2 \times \overline{BC}^2 = \overline{HB}^2 \times \overline{CA}^2 + \overline{HC}^2 \times \overline{AB}^2$$
$$+ 2\overline{HB}.\overline{HC} \times \overline{CA}.\overline{AB} \times \cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB});$$

on retranche, on transpose, on divise par $2\overline{CA}.\overline{AB}$, et l'on doit démontrer que l'on a

$$\overline{DH}^2 \frac{\overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{CA}.\overline{AB}}$$
$$= \overline{DB}.\overline{DC}\cos L - \overline{HB}.\overline{HC}\cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB})$$

ou

$$\overline{DH}^2 \cos \widehat{AC, AB}$$
$$= \overline{DB}.\overline{DC}\cos L - \overline{HB}.\overline{HC}\cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB});$$

cela devient, les sens positifs étant DH, DB, DC, HB, HC,

$$\cos L = \cos\widehat{DH, DB}\cos\widehat{DH, DC}\cos\widehat{AC, AB}$$
$$+ \sin\widehat{DH, DB}\sin\widehat{DH, DC}\cos(\widehat{HB, HC} + \widehat{AC, AB}),$$

ou, en développant le dernier cosinus et en rapprochant les deux termes en $\cos\widehat{AC, AB}$,

$$\cos L = \left(\begin{array}{l} \cos\widehat{DH, DB}\cos\widehat{DH, DC} \\ + \sin\widehat{DH, DB}\sin\widehat{DH, DC}\cos\widehat{HB, HC} \end{array}\right)\cos\widehat{AC, AB}$$
$$- \sin\widehat{DH, DB}\sin\widehat{DH, DC}\sin\widehat{HB, HC}\sin\widehat{AC, AB}.$$

Considérons alors le trièdre DH, DB, DC : d'une part, le facteur qui multiplie $\cos\widehat{AC, AB}$ dans la formule précédente exprime la quantité $\cos\widehat{DB, DC}$; d'autre part, le facteur qui multiplie $\sin\widehat{AC, AB}$ exprime le sinus du trièdre considéré, et cette quantité a encore pour expression

$$\sin \widehat{DB, DC} \times \sin(DH, DBC) \quad \text{ou} \quad \sin \widehat{DB, DC} \times \cos(ABC. DBC);$$

on obtient donc

$$\cos L = \cos \widehat{DB, DC} \cos \widehat{AC, AB} \\ - \sin \widehat{DB, DC} \sin \widehat{AC, AB} \cos(DBC, ABC),$$

ce qui correspond précisément à la formule (1). Le théorème I est donc démontré.

Il serait intéressant d'établir ce théorème par la méthode des quaternions; comme il consiste, si l'on veut, en trois formules dont l'une est

$$l = m \cos N + n \cos M \qquad \text{ou} \qquad 1 = \frac{m}{l} \cos N + \frac{n}{l} \cos M,$$

si l'on observe que l'expression $\frac{m}{l} \cos N$ est la partie scalaire du produit des deux biradiales $\frac{DB}{DA}$ et $\frac{CA}{CB}$, on entrevoit la possibilité d'une telle démonstration.

II.

7. Considérons spécialement les angles L, M, N définis par les formules (1), et les quantités l, m, n définies par les formules (2) : on peut avoir un tétraèdre ABCD, ou un quadrangle plan A, B, C, D, ou trois points A, B, C en ligne droite et un point D extérieur, et nous commencerons par ce dernier cas; notre but est d'étendre les formules et d'indiquer des applications des formules généralisées.

Soient d'abord deux droites de l'espace sur lesquelles se trouvent les deux divisions semblables A, B, C *et* A′, B′, C′, et considérons les segments A′A, B′B, C′C qui sont parallèles à un même plan R. Si l'on fait une projection oblique de la figure sur le plan R, les projetantes étant parallèles à $A'B'C'$, les segments sont projetés en vraie grandeur en $O'A_0$, $O'B_0$, $O'C_0$, et la division $A_0B_0C_0$ est semblable aux deux premières. On voit que, *si l'on connaît les trois longueurs* AA', BB', CC', *et la valeur du rapport* $\frac{BC}{CA}$, *la figure* $O'A_0B_0C_0$ *est déterminée, de sorte que les angles* (AA', BB'), ... *le sont aussi ; en posant*

$$\frac{\overline{BC}}{p} = \frac{\overline{CA}}{q} = \frac{\overline{AB}}{r},$$

on a, d'après le n° 5,

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{p.\overline{AA'}}{\sin(BB', CC')} = \dfrac{q.\overline{BB'}}{\sin(CC', AA')} = \dfrac{r.\overline{CC'}}{\sin(AA', BB')}, \\ (BB', CC') + \ldots = 0, \end{array} \right.$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} p^2.\overline{AA'}^2 = q^2.\overline{BB'}^2 + r^2.\overline{CC'}^2 \\ \qquad + 2qr.\overline{BB'}.\overline{CC'} \times \cos(BB', CC'), \quad \ldots. \end{array} \right.$$

8. *Soient, en second lieu, deux triangles directement semblables* ABC *et* A'B'C' *situés dans un même plan,* et considérons les segments A'A, B'B, C'C. Si l'on emploie la notation $\overline{\overline{AB}}$ avec le même sens qu'au n° 6, on a

$$\overline{\overline{B'C'}} = \overline{\overline{BC}} \times k, \qquad \overline{\overline{C'A'}} = \overline{\overline{CA}} \times k, \qquad \ldots;$$

à cause de

$$\overline{\overline{BB'}} + \overline{\overline{B'C'}} + \overline{\overline{C'C}} + \overline{\overline{CB}} = 0,$$

ou

$$\overline{\overline{BB'}} - \overline{\overline{CC'}} = \overline{\overline{BC}} - \overline{\overline{B'C'}};$$

on en conclut

$$\overline{\overline{BB'}} - \overline{\overline{CC'}} = \overline{\overline{BC}} \times (1 - k), \qquad \ldots,$$

et il en résulte ceci : si, à partir d'un point O', on trace les segments $O'A_0$, $O'B_0$, $O'C_0$ parallèles et égaux aux segments $A'A$, $B'B$, $C'C$, le triangle $A_0B_0C_0$ est semblable aux deux triangles donnés ; on le verrait d'ailleurs facilement par la Géométrie, en mettant, par exemple, le point O' en A'. Dès lors, *si l'on connaît les trois longueurs* AA', BB', CC', *et des quantités* p, q, r *proportionnelles aux côtés des deux triangles, la figure* $O'A_0B_0C_0$ *est déterminée, de sorte que les angles* (AA', BB'), ... *sont déterminés ; d'après le n° 6, les produits* $p\times\overline{AA'}$, $q\times\overline{BB'}$, $r\times\overline{CC'}$ *sont proportionnels aux côtés d'un triangle* LMN *dans lequel on connaît les angles des directions positives des côtés, savoir* $(BB', CC') + (AC, AB)$, ..., et l'on aurait des relations métriques que nous n'écrirons pas.

On a ce théorème :

Un triangle ABC *étant donné de position dans un plan, ainsi que les longueurs* AA' *et* BB' *avec l'angle qu'elles forment, si l'on construit le triangle* $A'B'C'$ *semblable au triangle* ABC, *le lieu du point* C' *est une circonférence de centre* C, *et la droite* CC' *fait des angles constants avec les droites* AA' *et* BB'.

La figure $O'A_0B_0C_0$ est en effet déterminée de grandeur ; les relations dont il est parlé plus haut donneraient le rayon CC'. Lorsque les points A, B, C sont en ligne droite, on a une démonstration simple en mettant le point O' en C' ; le cas plus particulier où le point C est le milieu du segment AB a été proposé comme exercice par M. E. Bourrienne, dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. Vuibert (1894, question 3454).

Voici une autre solution pour le cas général :

Étant donné dans un plan un contour quadrangulaire $ABB'A'$, le centre de similitude S des deux segments AB et $A'B'$ est aussi celui des deux segments AA' et BB'; dès lors, les triangles ABC et $A'B'C'$ étant supposés directement semblables, si l'on construit les trois triangles directement semblables, $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$, le triangle $A''B''C''$ est semblable aux deux premiers triangles; si l'on suppose $AA'' = AA'$, d'où $BB'' = BB'$, $CC'' = CC'$, on arrive au résultat cherché.

Il est intéressant de suivre la variation de la figure; les segments AA', BB', CC' peuvent être remplacés par les segments opposés AA'', BB'', CC''.

9. Relativement au théorème général, nous observerons d'abord que, si un tétraèdre ABCD varie en conservant les mêmes longueurs d'arêtes à partir de D, et une base ABC toujours semblable à elle-même, les angles résultants L, M, N sont invariables.

Soient alors, dans deux plans parallèles P *et* P', *deux triangles semblables* ABC, $A'B'C'$, et considérons les segments $A'A$, $B'B$, $C'C$: si, à partir d'un point O', on prend les segments $O'A_0$, $O'B_0$, $O'C_0$ parallèles et égaux aux segments $A'A$, $B'B$, $C'C$, le triangle $A_0B_0C_0$ est semblable aux deux triangles donnés; pour ramener ce cas au précédent (n° 8), on peut prendre le point O' dans le plan P', ce qui donne le triangle $A_0B_0C_0$ dans le plan P, et projeter cylindriquement le triangle $A'B'C'$ et le point O' sur le plan P.

Dès lors, *si l'on connaît les trois longueurs* AA', BB', CC', *et des quantités* p, q, r *proportionnelles aux côtés des deux triangles donnés, le tétraèdre* $O'A_0B_0C_0$ *n'est pas déterminé, il est vrai, mais, d'après la remarque ci-dessus, les angles résultants*

$$L = [(BB', CC') + (AC, AB)], \qquad \ldots$$

sont déterminés avec une somme nulle, et les produits

$p \times AA'$, $q \times BB'$, $r \times CC'$ *sont proportionnels aux côtés d'un triangle* LMN *dans lequel les angles des directions positives des côtés sont ces mêmes angles résultants;* on aurait des relations métriques.

Voici une conséquence de la remarque faite au début de ce numéro.

Dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1897), M. Raoul Bricard a donné ce théorème : « Les deux cercles C et C′, situés dans des plans parallèles, étant supposés rigides, si l'on réunit deux à deux leurs points homologues par des tiges rigides, articulées en ces points, le système obtenu est déformable, et les plans des cercles restent parallèles pendant la déformation. » Considérons alors deux tiges AA′ et BB′ : si nous prenons une troisième tige quelconque CC′, laquelle donne lieu à un angle (CB, CA) qui ne dépend que du système des deux premières tiges, *l'angle résultant indiqué par la notation* [(AA′, BB′) + (CB, CA)] *reste constant pendant la déformation ;* on considère le tétraèdre $O'A_0B_0C_0$ obtenu comme il a été dit.