NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. DE LONGCHAMPS

Les courbes images et les courbes symétriques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 373-378

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__373_0>

[O2b]

LES COURBES IMAGES ET LES COURBES SYMÉTRIQUES;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS.

1. Le Volume des *Sitzungsberichte der Königel Bohmischen* pour l'année 1898 contient une Note de M. Michel Petrovitch intitulée : *Sur un système de coordonnées semi-curvilignes,* dans laquelle il préconise, pour certaines recherches, le système suivant [1] :

Soit C une première courbe donnée. Sur C, on prend un point A comme origine. En un point M, mobile sur C, on trace la normale et, sur cette normale, à partir de M, on prend un point B, tel que $MB = n$ ait une relation déterminée avec l'arc $AM = \sigma$. Le lieu de B est une courbe C′, que M. Petrovitch appelle *l'image* [2] *de* C.

On peut porter la longueur n, sur la normale, en deux sens. On obtient ainsi deux courbes C′, C″, associées à C, comme il vient d'être dit. Ces deux courbes C′, C″ sont dites *courbes symétriques* relativement à C.

Le tracé des tangentes à ces courbes peut se faire très simplement, comme nous allons l'indiquer; nous trouverons ici une application nouvelle du principe dont nous avons, à plusieurs reprises, montré la fécondité : le principe des transversales réciproques.

---

(1) L'idée générale à laquelle est empruntée l'idée particulière que nous allons indiquer se trouve exposée, comme l'on sait, dans l'Ouvrage de l'abbé Aoust.

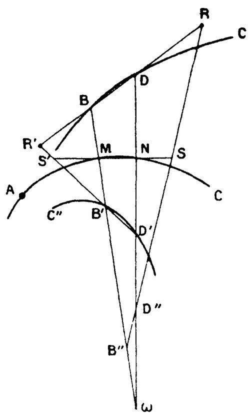
(2) Si notre mémoire est fidèle, ce mot a été pris déjà et dans un autre sens.

2. Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on sait construire les tangentes à l'une des courbes C′, C″, on saura tracer la tangente à la courbe symétrique.*

Soit C la courbe proposée ; sur C, prenons deux points infiniment voisins M, N ; puis, ayant tracé les normales

Fig. 1.



en ces points, prenons MB = MB′, ND = ND′, les longueurs MB, ND étant calculées conformément à la condition imposée à l'arc AM = σ compté, sur C, à partir de A et à la longueur n de la normale MB.

Les normales MB, ND se coupent en un point ω qui est, à la limite, le centre de courbure de C, au point M.

Prenons ωB″ = MB, ωD″ = ND. Dans le triangle ωBD, les droites MN, B″D″ sont deux transversales réciproques ; elles coupent BD en deux points isotomiques R, R′ (¹).

D'autre part, dans le triangle ωMN, B″D″ et B′D′ sont, aussi, deux transversales réciproques ; elles coupent MN en deux points isotomiques S, S′.

(¹) La figure est légèrement inexacte.

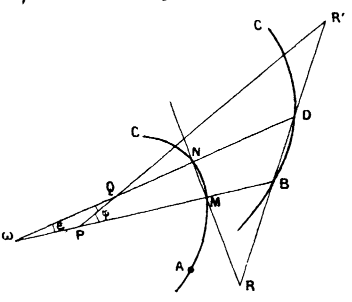
Si nous passons à la limite, il est facile de voir que la connaissance de la tangente en B entraine celle de la tangente en B′, et réciproquement.

Supposons connue la tangente en B à la courbe C′; alors on connaît la position limite r' du point R′, point de rencontre de la tangente en B, à C′, avec la tangente en M, à C. Le point R a pour position limite un point r, symétrique de r' par rapport à B. Ainsi B″D″ a une position limite déterminée par le point r et par B″. On connaîtra donc le point s, position limite de S, et, par suite, celle de s', position limite du point S′. Finalement, on connaîtra la position limite de S′B′; la tangente en B′ se trouvera ainsi construite.

Réciproquement, la connaissance de la tangente en B′ à la courbe C″ entraîne celle de la tangente en B à la courbe C′. On connaîtra, en effet, la limite du point S′; par suite, celle de S. Les deux droites B′D′, B″D″ ayant des positions limites bien définies, il restera à mener par B une droite partagée en deux parties égales par le point et par les droites en question.

3. Cela posé, considérons une courbe C et l'une de

Fig 2



ses images, au sens attribué tout à l'heure à ce mot, la courbe C′.

Sur les normales infiniment voisines $M\omega$, $N\omega$ prenons

$$\omega P = MB, \qquad \omega Q = ND.$$

En posant

$$AM = s, \qquad BM = n, \qquad Q\omega P = \varepsilon, \qquad QPB = \varphi.$$

avec la condition

$$n = f(s),$$

le triangle ωPQ donne

$$\frac{\omega P}{\sin(\varphi - \varepsilon)} = \frac{\omega Q}{\sin\varphi} = \frac{\omega Q - \omega P}{\sin\varphi - \sin(\varphi - \varepsilon)},$$

ou

$$\frac{f(s)}{\sin(\varphi - \varepsilon)} = \frac{f(s+ds)}{\sin\varphi} = \frac{\dfrac{f(s+ds) - f(s)}{ds}\,\dfrac{ds}{\varepsilon}}{\dfrac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\cos\left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

En passant à la limite, ρ désignant le rayon de courbure en M à la courbe C, on a

$$\frac{f(s)}{\sin\varphi} = \frac{\rho\,\dfrac{\partial f}{\partial s}}{\cos\varphi}$$

ou, enfin,

$$\operatorname{cotang}\varphi = \rho\,\frac{f'(s)}{f(s)}.$$

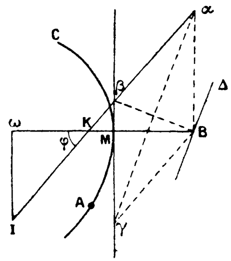
Cette formule permet de résoudre, dans tous les cas, le problème des tangentes pour la courbe C'. Elle permet, en effet, de construire l'angle φ que fait, avec la normale ωM, la limite de PQ. Or PQ, MN sont deux transversales réciproques du triangle ωBD; la tangente à C', en B, limite de BD, s'obtiendra donc en menant, par B, une droite partagée en deux parties égales par la tangente en M à la courbe C et par la droite qui, passant par P, fait avec ωM, dans un sens déterminé, un angle φ correspondant à la formule que nous avons établie.

4. Supposons, pour indiquer une application simple, que l'on prenne, à chaque instant, MB = arc AM. L'équation de C′, dans le système proposé, est $s = n$, et l'on a

$$\operatorname{cotang}\varphi = \frac{\rho}{n}.$$

Élevons ωI perpendiculaire à ωM et prenons ωI = MB, ω étant le centre de courbure, en M, à la courbe C. Alors l'angle ωMI est égal à φ ([1]). Il reste,

Fig. 3.



pour avoir la tangente, en B, à l'image de C, à mener par B une droite partagée en deux parties égales par IM et par la tangente en M à C. On construit le parallélogramme BαMγ, comme l'indique la figure; la tangente en B, à l'image de C, est la droite Δ, menée par B, parallèle à $\alpha\gamma$.

Dans le cas particulier où la courbe C que l'on transforme est une circonférence, l'image C′, en supposant S = n, a pour équation polaire

$$\rho = R + R\omega.$$

([1]) Les points K, β sont confondus avec M; la figure est inexacte.

C'est une conchoïde par rapport à la spirale d'Archimède, etc.

Mais nous n'insisterons pas sur les exemples divers que l'on peut rattacher au cas général que nous avons examiné ici ; notre intention était simplement d'appeler l'attention sur un système de coordonnées qui paraît, par la lecture du Mémoire de M. Petrovitch, Mémoire auquel nous renvoyons le lecteur pour plus de détails, appelé à quelques applications intéressantes.