NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 191-194

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__191_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1732.

(1896, p. 296*.)

Étant donné un triangle ABC, *rectangle en* A, *sur les trois côtés* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ *pris comme diamètres, on décrit les circonférences* πa, πb, πc. *Les trois demi-circonférences supérieures comprennent entre elles deux lunules, que nous désignons par* l *et* l'; *les trois demi-circonférences inférieures forment entre elles un triangle curviligne et un segment biconvexe, que nous représentons par* t *et* s.

Prouver que :

1° *La somme* $l + l'$ *est équivalente à la surface* $\frac{bc}{2}$ *du triangle ;*

2° *La différence* $t - s$ *entre le triangle curviligne et le segment biconvexe est aussi équivalente à la surface* $\frac{bc}{2}$;

3° *Les centres de gravité des deux surfaces* $l + l'$ *et* $t -$ *sont situés sur la perpendiculaire élevée par le milieu de l'hypoténuse* a, *symétriquement placés par rapport à cette droite, et à une distance d'elle égale à* $\frac{1}{8}\pi a$.

(G. Dostor.)

SOLUTION

Par M. Audibert.

On a évidemment

$$(1)\qquad l + l' + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2) + \frac{bc}{2},$$

d'où

$$l + l' = \frac{bc}{2},$$

et

$$(2)\qquad \frac{\pi a^2}{8} + \frac{bc}{2} = t + \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2) - s,$$

d'où

$$t - s = \frac{bc}{2}.$$

(1) et (2) étant des identités, la somme algébrique des moments des surfaces, par rapport à l'hypoténuse et à la perpendiculaire élevée en son milieu, seront égaux de part et d'autre, et y_1, x_1 désignant les coordonnées du centre de gravité de $l + l'$ relatives à ces axes, on déduira de (1) les équations

$$\frac{bc}{2}y_1 + \frac{a^3}{12} = \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} + \frac{2c^2}{3\pi a}\right) + \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} + \frac{2b^2}{3\pi a}\right) + \frac{2b^2c^2}{12a},$$

$$\frac{bc}{2}x_1 = \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}\right)$$
$$- \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a} + \frac{2bc}{3\pi a}\right) + \frac{bc}{12a}(b^2 - c^2),$$

d'où l'on tire

$$y_1 = \frac{\pi a}{8}, \qquad x_1 = 0.$$

Les coordonnées du centre de gravité de $t - s$ se déduiront de même de (2) à l'aide des deux équations

$$\begin{aligned}
-\frac{a^3}{12} + \frac{2b^2c^2}{12a} + \frac{bc}{2}y_1 + \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} - \frac{2c^2}{3\pi a}\right)& \\
+ \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{bc}{2a} - \frac{2b^2}{3\pi a}\right)&,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{bc(b^2 - c^2)}{12a} = \frac{bc}{2}x_1 + \frac{\pi c^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a} - \frac{2bc}{3\pi a}\right)& \\
- \frac{\pi b^2}{8}\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{2a} - \frac{2bc}{3\pi a}\right)&,
\end{aligned}$$

qui donnent

$$y_1 = -\frac{\pi a}{8}, \qquad x_1 = 0.$$

Questions 1734 et 1735.

(1896, p. 344.)

1734. *Si $n - 1$ et $n + 1$ sont deux nombres premiers plus grands que 5, n est nécessairement de la forme $n = 30m$, ou $n = 30m \pm 12$, et $n^2(n^2 + 16)$ est toujours divisible par* 720. (WOLSTENHOLME.)

1735. *Si $n - 2$ et $n + 2$ sont deux nombres premiers plus grands que 5, n est nécessairement de la forme* $n = 30m + 15$ ou $n = 30m \pm 9$. (WOLSTENHOLME.)

SOLUTIONS

Par M. DULIMBERT.

1734. Il est évident d'abord qu'il ne peut s'agir que de nombres supérieurs à 5, la plus petite valeur de n donnée par les formules étant 7.

Un nombre quelconque rentre dans une des formes suivantes :

$$30m, \quad 30m \pm 1, \quad \ldots, \quad 30m \pm 14. \quad 30m + 15.$$

Si nous tirons d'une de ces formes les valeurs de $n+1$ et $n+2$, nous voyons que l'un de ces deux nombres a un diviseur évident, sauf dans les cas de $n = 30m$ et $n = 30m \pm 12$.

Le nombre 720 est égal à $2^4.3^2.5$. Prenons $n = 30m$. Alors on a identiquement

$$\begin{aligned} n^2(n^2+16) &= 2^2.3^2.5^2.m^2(2^2.3^2.5^2.m^2+2^4) \\ &= 2^4.3^2.5^2.m^2(3^2.5^2.m^2+2^2); \end{aligned}$$

sous cette forme la divisibilité est évidente.

Prenons maintenant $n = 30m \pm 12$. On a identiquement

$$\begin{aligned} n^2(n^2+16) &= 2^2.3^2(5m\pm 2)^2\{2^2.3^2(5m\pm 2^2)^2+2^4\} \\ &= 2^4.3^2(5m\pm 2)^2\{3^2(5m\pm 2)^2+2^2\}. \end{aligned}$$

La divisibilité par 720 sera démontrée si l'on démontre que la quantité entre accolades est divisible par 5. Or, si l'on développe le carré, on constate que deux de ses termes contiennent 5 en facteur; le troisième, $3^2.2^2$, ajouté au terme 2^2, donne 40, quantité divisible par 5. La divisibilité est donc démontrée.

1735. La démonstration est identique à celle de la première partie de la question 1734.

Autres solutions de M. R. de Montessus.