NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de novembre 1898. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 175-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__175_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE NOVEMBRE 1898. — COMPOSITIONS.

Lyon.

Analyse.

I. *On considère les courbes* C *définies par les équations*

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
x &= \cos t - \varphi(t)\sin t,\\
y &= \sin t + \varphi(t)\cos t,\\
z &= \ t \ + \varphi(t).
\end{aligned}
\right.
$$

Former, entre la variable t et la fonction inconnue $\varphi(t)$, *l'équation différentielle du second ordre* E, *laquelle exprime que la normale principale à* C *est parallèle à la droite* D

$$x = z\sin t, \qquad y = -z\cos t.$$

E *devient du troisième ordre et linéaire quand on pose*

$$\varphi = -\frac{\psi(t)}{\psi'(t)}, \qquad \psi' = \frac{d\psi}{dt}.$$

Intégrer et montrer que les diverses courbes C, fournies par les diverses intégrales, sont les géodésiques d'une certaine surface Σ. Étudier Σ et ses lignes de courbure.

Si dans les équations (1) on envisage φ comme une seconde variable indépendante, on a un hélicoïde développable Σ. La génératrice a pour cosinus directeurs

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{-\cos t}{\sqrt{2}}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

L'arête de rebroussement est l'hélice H

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad z = t.$$

C est évidemment située sur Σ. La longueur de génératrice comprise entre C et H est $-\varphi\sqrt{2}$. Cela fournit la signification géométrique des deux *cordonnées* t et φ d'un point sur Σ. La normale à Σ est parallèle à la droite D. C sera géodésique dès que son plan osculateur passera par la normale. On a ainsi la condition [différentiant le système (1)]

$$\begin{vmatrix} x'' & x' & \sin t \\ y'' & y' & -\cos t \\ z'' & z' & 1 \end{vmatrix} = \varphi(\varphi - 2\varphi'') + 2(1+\varphi')(1+2\varphi') = 0.$$

C'est l'équation E qui devient, pour $\varphi = -\frac{\psi}{\psi'}$ et tout calcul fait,

$$2\psi''' + \psi' = 0.$$

De là

$$\psi = a + b\cos\frac{t - t_0}{\sqrt{2}},$$

$$(2) \qquad \varphi = \frac{C}{\sin\frac{t-t_0}{\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\cot\frac{t-t_0}{\sqrt{2}}.$$

(2) fournit, avec les deux paramètres arbitraires c et t_0, les géodésiques C de Σ.

Sur la développable Σ, les lignes de courbure sont, outre les génératrices, encore les trajectoires orthogonales des génératrices, c'est-à-dire les courbes

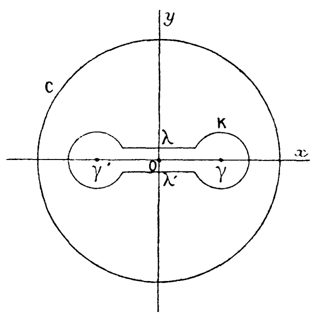
$$\varphi = \text{const.},$$

en vertu de la signification géométrique de φ.

II. *On envisage, dans le plan de la variable complexe z, l'origine* O *des coordonnées, le cercle* C *de rayon* R *et de centre* O, *les deux points γ, $z = 1$ et γ', $z = -1$; enfin un contour* K *ainsi défini : deux arcs de cercle décrits autour de γ et γ' comme centres avec le rayon ρ et reliés par deux parallèles λ et λ' à l'axe des x.*

Démontrer : 1° *que la fonction*

$$u = \sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$$



est uniforme dans le champ compris entre K *et* C;
2° *que la valeur de l'intégrale*

$$I = \int \frac{dz}{u},$$

prise le long de C, *est indépendante de* R.

Calculer I *et exprimer au moyen de* I *l'intégrale réelle*

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x)^3(1+x)}},$$

prise de γ' *à* γ *le long de l'axe des* x.

On vérifie immédiatement que : 1° les seuls points de ramification sont γ et γ'; 2° l'élément de I est multiplié par $-i$, $i = \sqrt{-1}$, quand z fait le tour de γ; 3° les résidus de I afférents à γ et γ' sont nuls.

Pour calculer I_C on fera $R = \infty$, ce qui réduit I_C à

$$\int_C \frac{dz}{z\sqrt[4]{-1}} = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{-1}}.$$

Intégrons, en partant de γ' et y revenant le long du contour K avec ρ infiniment petit; on aura

$$J(1+i) = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{-1}},$$

$$J = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{-(1+i)^4}} = \frac{2\pi i}{\sqrt[4]{4}} = \pi\sqrt{2}.$$

Mécanique.

I. *Soit* P *un paraboloïde de révolution, dont l'équation, en coordonnées semi-polaires*

$$z, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \text{arc tang}\frac{y}{x},$$

est

$$r^2 = 2pz.$$

Sur P *se meut sans frottement un point* M, *de masse un, attiré vers le sommet de* P *par une force proportionnelle à la distance.*

Construire et discuter les projections sur xy *des* *trajectoires, en supposant la vitesse initiale tangente au parallèle de départ.*

Cas où le paramètre p augmente indéfiniment.

Appliquer les théorèmes des aires et des forces vives. Quand $p = \infty$, P se réduit à un plan; les trajectoires sont des ellipses ayant leur centre à l'origine, ce qui s'aperçoit *a priori.*

II. *Une droite* D *roule sur une circonférence* C *avec une vitesse instantanée constante* ω_1. C *de son côté tourne, avec une vitesse angulaire constante* ω, *autour d'un de ses points fixes* O. *Construire les roulettes fixe et mobile qui interviennent dans le mouvement absolu de* D. *Cas* $\omega + \omega_1 = 0$.

Composition de deux rotations. La roulette mobile est une circonférence tangente à C en O. Le cas $\omega + \omega_1 = 0$ fournit une translation.

Marseille.

Analyse infinitésimale.

Épreuve écrite. — 1° *Les lettres p, q, r, s, t désignant, suivant l'usage, les dérivées partielles de la fonction z qui dépend des deux variables x et y, démontrer que, pour toute surface développable, les trois expressions*

$$z - px - qy, \quad p, \quad q$$

sont fonctions d'une seule d'entre elles, et que l'on a la relation

$$rt - s^2 = 0.$$

Démontrer les réciproques.

2° *Quelles sont les surfaces dont les lignes de pente sont des lignes de courbure?*

Les coordonnées sont supposées rectangulaires.

2° On a à la fois

$$dz = p\,dx + q\,dy = 0,$$
$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz};$$

on en déduit évidemment

$$p\,dp + q\,dq = 0.$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \text{const.}$$

Puisque p est fonction de q, les surfaces sont développables.

Ce sont donc les enveloppes d'un plan mobile qui se déplace en faisant un angle constant avec le plan horizontal.

Épreuve pratique. — *L'équation différentielle*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha\frac{dy}{dx} - \beta xy = 0,$$

où α et β sont des constantes dont la première α est positive, admet une intégrale représentée par une série convergente de Maclaurin.

Déterminer la loi des coefficients et étudier la série

$$y = y_0\left[1 + \frac{\beta x^2}{(1+\alpha)\times 2} + \frac{\beta^2 x^4}{(1+\alpha)(3+\alpha)\times 2\times 4} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\beta^n x^{2n}}{(1+\alpha)(3+\alpha)\ldots(2n-1+\alpha)\times 2\times 4\times\ldots\times 2n} + \ldots\right].$$

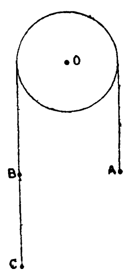
Pour étudier cette série, on forme le rapport d'un terme au précédent.

MÉCANIQUE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical un disque homogène de poids* P *peut tourner autour de son centre* O *qui est fixe.*

Sur ce disque est enroulé un fil flexible, inextensible et sans masse dont les extrémités pendent verticalement de chaque côté du disque. Le fil ne peut pas glisser sur le disque.

A l'extrémité A *du fil est attaché un poids* P *égal au poids du disque. A l'autre extrémité* B *du fil est*



attaché un fil élastique BC *dont on néglige la masse, et dont la longueur, à l'état naturel, est égale au rayon du disque. Ce fil élastique porte à son extrémité* C *un poids* P *égal au poids qui est en* A.

Ce fil s'allonge proportionnellement à sa tension, et il double de longueur sous l'action d'une tension égale à P.

Trouver le mouvement du système, sachant qu'il n'y a pas de vitesse initiale et qu'au commencement du mouvement le fil élastique est à l'état naturel.

La longueur du fil non élastique est telle qu'au commencement les points A *et* B *sont sur une même horizontale située à une distance du point* O *plus grande que le diamètre.*

Soient :

M la masse de chacun des poids et du disque ;
R le rayon du disque ;
T et T′ les tensions ;
x la distance BC ;
θ l'angle dont le disque tourne du côté du point A.

On a, au point A,

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} = P - T,$$

au point C

$$MR\frac{d^2\theta}{dt^2} - M\frac{d^2x}{dt^2} = T' - P,$$

pour le disque

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = (T - T')R,$$

pour la longueur du fil élastique

$$x = R\left(1 + \frac{T'}{R}\right).$$

De ces quatre équations, on tire facilement

$$5R\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

et, puisque les vitesses initiales sont nulles,

$$5R\frac{d\theta}{dt} - 2\frac{dx}{dt} = 0,$$

d'où, en vertu des conditions initiales,

$$5R\theta - 2x = -2R;$$

ensuite on a

$$\frac{3}{5}M\frac{d^2x}{dt^2} = P - P\frac{x - R}{R},$$

d'où facilement

$$x = R\left(2 - \cos\sqrt{\frac{5g}{3R}}\,t\right).$$

La longueur x varie donc de R à 3R.

On a alors

$$R\theta = \frac{2}{5}R\left(1 - \cos\sqrt{\frac{5g}{3R}}\,t\right).$$

Le point A commence donc par descendre (et le point B par remonter). Le point A s'abaisse de $\frac{4}{5}$R, puis revient au point de départ.

Enfin, pour le point C, on a

$$x - R\theta = \frac{1}{5}R\left(8 - 3\cos\sqrt{\frac{5g}{3R}}\,t\right).$$

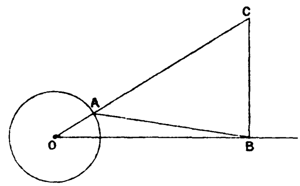
Donc le point C descend d'abord, s'abaisse de $\frac{6}{5}$R au-dessous de sa position initiale et revient au point de départ.

Épreuve pratique. — *Une manivelle* OA *dont la longueur est égale à* 1^{m} *tourne uniformément autour de son extrémité* O *qui est fixe, en faisant cinq tours par minute.*

A cette manivelle s'articule en A *une bielle* AB, *dont la longueur est* 3^{m} *et dont l'extrémité* B *glisse sur une droite fixe* Δ *dont le prolongement passe par* O.

On demande de déterminer graphiquement les vitesses du point B *au moyen d'une courbe dont les abscisses seraient les positions de* B *et dont les ordonnées seraient les vitesses correspondantes à ces positions.*

Le centre instantané de rotation de la bielle AB est au point C rencontre du rayon OA et de la perpendiculaire BC à la droite Δ.



Soient :

ω la vitesse angulaire de OA ;
φ la vitesse angulaire de la rotation de la bielle ;
v la vitesse du point B sur la droite A.

On aura

$$OA \times \omega = CA \times \varphi,$$
$$v = CB \times \varphi;$$

on aura donc pour la vitesse

$$v = OA \times \omega \times \frac{CB}{CA}.$$

On peut, par suite, construire la courbe demandée facilement point par point.

Astronomie.

Épreuve écrite. — *Indiquer la série des opérations nécessaires pour mesurer un arc de méridien.*

Admettant que le sphéroïde terrestre est un ellipsoïde de révolution autour de la ligne des pôles, montrer qu'il suffit de connaître les longueurs de deux arcs de méridien situés à des latitudes différentes, pour en déduire la forme et les dimensions de ce méridien.

Comment traite-t-on un ensemble d'observations?

La valeur adoptée pour le mètre étalon est-elle trop forte ou trop faible?

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Étant données l'ascension droite et la déclinaison de la Lune à* 0^h, 4^h, 8^h, 12^h *et* 16^h (*temps moyen de Paris*) *pour une certaine date; sachant en outre que la longitude orientale de Marseille, par rapport au méridien de Paris, est de* $12^m 13^s,6$; *on demande de calculer l'ascension droite et la déclinaison de la Lune à l'heure t, de la même date, t étant exprimé en temps moyen de Marseille.*

Données numériques.

1898 novembre 20 à	α.	δ.
h	h m s	° ′ ″
0........	21.45.39,09	—9.32.16,2
4........	21.54.17,27	—8.37.30,4
8........	22. 2.51,27	—7.42.12,1
12........	22.11.21,39	—6.46.26,6
16........	22.19.47,91	—5.50.18,9

$t = 2.40.32,8$ (temps moyen de Marseille).

	α.	Δ¹.	Δ².	Δ³.	Δ⁴.
h	h m s	m s	s	s	s
0...	21.45.39,09 +	8.38,18 —	4,18 +	0,30 —	0,02
4...	21.54.17,27 +	8.34,00 —	3,88 +	0,28	
8...	22. 2.51,27 +	8.30,12 —	3,60		
12...	22.11.21,39 +	8.26,52			
16...	22.19.47,91				

	δ.				
0...	— 9.32.16,2	+ 54.45,8	+ 32,5	— 5,3	+ 0,3
4...	— 8.37.30,4	+ 55.18,3	+ 27,2	— 5,0	
8...	— 7.42.12,1	+ 55.45,5	+ 22,2		
12...	— 6.46.26,6	+ 56. 7,7			
16...	— 5.50.18,9				

$$u = u_0 + \frac{s}{1}\Delta u_0 + \frac{s(s-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1.2.3}\Delta^3 u_0$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u_0$$
$$= u_0 + A_1\Delta^1 + A_2\Delta^2 + A_3\Delta^3 + A_4\Delta^4.$$

t (en temps moyen de Marseille)	=	$2^{h}.40^{m}.32^{s},8$
Différence de longitude	=	12.13,6
t (en temps moyen de Paris)	=	2.28.19,2

Log.		Log.	
s............	$\bar{1}$,79099	A_1...	$+\bar{1}$,79099
$(s-1):2$....	$-\bar{1}$,2810	A_2...	$-\bar{1}$,0720
$(s-2):3$....	$-\bar{1}$,663	A_3...	$+\bar{2}$,735
$(s-3):4$....	$-\bar{1}$,77	A_4. .	$-\bar{2}$,50

Log.	α.	δ.
Δ^1...........	+2,71448	+3,51664
A_1...........	$+\bar{1}$,79099	$+\bar{1}$,79099
$A_1\Delta_1$.........	+2,50547	+3,30763
Δ^2...........	-0,6212	$+\bar{1}$,5119
A_2...........	$-\bar{1}$,0720	$-\bar{1}$,0720
$A_2\Delta^2$........	$+\bar{1}$,6932	$-\bar{2}$,5839
Δ^3...........	$+\bar{1}$,477	—0,724
A_3...........	$+\bar{2}$,735	$+\bar{2}$,735
$A_3\Delta^3$........	$+\bar{2}$,212	$-\bar{1}$,459
Δ^4...........	$-\bar{2}$,30	- $\bar{1}$,48
A_4...........	$-\bar{2}$,50	$-\bar{2}$,50
$A_4\Delta^4$.........	$+\bar{4}$,80	$-\bar{3}$,98

$$s = \frac{2^{h},472}{4^{h}} = 0,618$$

$$\frac{s-1}{2} = -0,191 \qquad s-1 = -0,382$$

$$\frac{s-2}{3} = -0,46067 \qquad s-2 = -1,382$$

$$\frac{s-3}{4} = -0,5955 \qquad s-3 = -2,382$$

	α.	δ.
$A_1\Delta^1$........	$+5^{m}.20^{s},235$	$+33'.50'',6$
$A_2\Delta^2$........	+ 0,493	— 3,84
$A_3\Delta^3$........	+ 0,021	— 0,29
$A_4\Delta^4$........	+ 0,001	— 0,01
Somme......	+5.20,75	+33.46,5

$$u_0 = 21^{h}.45^{m}.39^{s},09 - 9^{\circ}.32'.16'',2,$$

$$\text{Résultats}\ \begin{cases} \alpha = 21^{h}.50^{m}.59^{s},84 \\ \delta = -\ 8^{\circ}.58'.29'',7 \end{cases}$$

Nancy.

ANALYSE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Soient une équation algébrique irréductible* $f(x, y) = 0$ *de degré* m *en* y, *et une intégrale abélienne quelconque appartenant à cette équation*

$$u = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dx,$$

φ *désignant une fonction rationnelle. Trouver les diverses valeurs que prend cette intégrale lorsqu'on fait varier le chemin d'intégration sans changer ses extrémités ; périodes polaires ; périodes cycliques.*

II. *Étant donnée l'équation différentielle linéaire*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} - qy = 0,$$

où les coefficients p *et* q *sont des fonctions uniformes de* x, *on considère un point singulier isolé* a *de ces fonctions :*

1° *Montrer qu'il existe, relativement au point* a, *un système fondamental d'intégrales possédant des propriétés simples ;*

2° *Déduire de ces propriétés la forme analytique de ces intégrales envisagées dans le domaine du point* a ;

3° *Calculer effectivement ces intégrales dans le cas particulier où l'on a* $p = 0$, $q = \dfrac{\sin^2 2\alpha}{4(x-a)^2}$, α *pouvant recevoir toutes les valeurs possibles.*

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *à tout point* M *de l'espace* *on fait correspondre un cercle* σ *ayant son centre au point* O, *son plan perpendiculaire à* OM *et son rayon égal à cette droite :*

1° *Trouver le lieu du point* M *pour lequel le cercle* σ *est tangent au cylindre*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (a<b);$$

2° *Ce lieu est une surface du quatrième ordre* Σ. *Déterminer les sections de* Σ *par chacun des plans de coordonnées et les points doubles de la surface situés dans ces plans ;*

3° *Si l'on projette sur le plan des* xy *les sections de* Σ *par des plans perpendiculaires à* Oz *puis par des sphères de centre* O, *on obtient deux familles de coniques homofocales, et les coniques d'une famille sont orthogonales aux coniques de l'autre famille ;*

4° *Les coordonnées* x *et* y *d'un point de* Σ *peuvent s'exprimer en fonction de la coordonnée* z *et d'un paramètre* u *par les formules*

$$x=\sqrt{b^2-z^2}\sin u; \qquad y=\sqrt{a^2-z^2}\cos u.$$

II. *Les coordonnées d'un point d'un paraboloïde de révolution étant exprimées au moyen de deux paramètres par les formules*

$$x=\mathrm{R}\cos v, \qquad y=\mathrm{R}\sin v, \qquad z=\frac{\mathrm{R}^2}{2p},$$

on demande de déterminer sur cette surface un réseau isotherme constitué par des parallèles et des méridiens.

La première question est l'étude d'un cas particulier de la surface de l'onde; *voir* l'article de M. Lacour dans les *Nouvelles Annales* de 1898, p. 266.

Pour la seconde question, on a

$$ds^2 = \left(1 + \frac{R^2}{p^2}\right) dR^2 + R^2 dv^2 = R^2\left(dv^2 + \frac{R^2 + p^2}{R^2 p^2}\, dR^2\right);$$

il suffit de poser

$$du = \frac{\sqrt{R^2 + p^2}}{Rp}\, dR,$$

d'où

$$u = \frac{\sqrt{R^2 + p^2}}{p} + L\,\frac{\sqrt{R^2 + p^2} - p}{R}$$

pour avoir

$$ds^2 = R(u)^2 (du^2 + dv^2).$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée une surface* S *qui est de révolution autour d'une droite* D, *on considère les courbes* C *tracées sur cette surface et dont les normales principales rencontrent constamment la droite* D.

1° *Déterminer les projections des courbes* C *sur un plan perpendiculaire à* D;

2° *Indiquer quelle est la forme de ces projections lorsque la surface* S *est un cône, et quelles sont les transformées des courbes* C *lorsqu'on développe le cône sur un plan.*

II. *Déterminer toutes les fonctions u de trois variables x, y, z qui vérifient l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

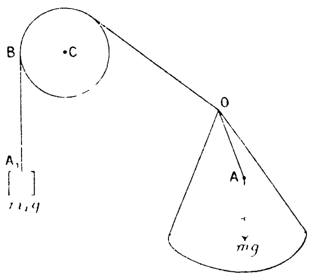
et qui sont de la forme

$$u = f(x) \times \varphi(y) \times \psi(z).$$

III. *Définition et détermination de la torsion d'une courbe gauche en un point donné de cette courbe.*

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Étudier le mouvement d'un système pesant composé d'un fil de longueur constante qui porte à ses deux extrémités* A *et* A_1 *deux poids*



mg et $m_1 g$. *Ce fil passe sur une poulie fixe* BC *et dans un petit anneau* O *placé au sommet d'un cône droit dont l'axe est vertical, la partie* OA *du fil devant rester sur ce cône et la partie* BA_1 *verticale.*

La masse de la poulie est M *et son rayon de gyration* k. *On négligera la masse du fil.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer le centre de gravité de l'aire comprise entre la cissoïde* $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$ *et son asymptote.*

MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Transmission du mouvement de rotation entre deux axes parallèles par le roulement de deux cames cylindriques.*

Condition de roulement des deux profils. Exemples simples.

Problème d'Euler : trouver l'un des profils connaissant l'autre; application au cas d'un cercle tournant autour d'un point de sa circonférence.

Profils dérivés.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Construire un système articulé plan permettant de décrire l'hyperbole équilatère.*

ASTRONOMIE OU MÉCANIQUE CÉLESTE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Définitions relatives aux parallaxes des étoiles et à celles des astres du système solaire. Valeurs des parallaxes de la Lune, du Soleil, des planètes principales, de quelques étoiles.*

Des ascension droite et déclinaison d'une planète, observées à un même instant, déduire l'ascension droite et la déclinaison géocentriques à cet instant : 1° *dans le cas d'observations méridiennes;* 2° *dans le cas d'observations faites à un équatorial.*

Indications sur la détermination des parallaxes.