NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TIKHOMANDRITZKY

Sur le second théorème de la moyenne

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 173-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__173_1>

[C2h]

SUR LE SECOND THÉORÈME DE LA MOYENNE;

PAR M. TIKHOMANDRITZKY.

On démontre le second théorème de la moyenne, appartenant à M. Bonnet, indépendamment du premier (*voir* les *Cours* de M. Jordan et de M. Demartres); cependant, dans le cas où le facteur de la fonction à intégrer, lequel varie dans le même sens entre les limites de l'intégrale, admet une dérivée, le second théorème de la moyenne n'est qu'un simple corollaire du premier. Comme je ne sais pas si cette remarque a été faite avant moi, je vais le montrer ici.

Soit donnée l'intégrale

$$(1) \qquad \mathrm{I} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

$f(x)$ variant dans le même sens lorsque x croît de x_0 à X et admettant une dérivée $f'(x)$. En intégrant par parties, on aura

$$(2) \quad \mathrm{I} = \left[f(x) \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \right]_{x_0}^{\mathrm{X}} - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx\,f'(x)\,dx,$$

ou

$$(3) \quad \mathrm{I} = f(\mathrm{X}) \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\,dx - \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx\,f'(x)\,dx.$$

Mais, $f'(x)$ conservant son signe entre les limites de l'intégrale, car $f(x)$ varie toujours dans le même sens d'après notre supposition, on aura, par le premier théorème de la moyenne,

$$(4)\qquad \int_{x_0}^{X}\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx\,f'(x)\,dx=\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx\,[f(X)-f(x_0)],$$

ξ désignant une quantité comprise entre x_0 et X,

$$(5)\qquad x_0<\xi<X.$$

En portant la valeur (4) de l'intégrale dans l'équation (3), on aura [en remplaçant de plus I par sa valeur (1)]

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{X}f(x)\,\varphi(x)\,dx\\&\quad=f(X)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx-[f(X)-f(x_0)]\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}\right.$$

En ouvrant les parenthèses, on réduit de suite cette formule à la forme de Weierstrass (suivant M. Demartres),

$$(7)\qquad \int_{x_0}^{X}f(x)\,\varphi(x)\,dx=f(x_0)\int_{x_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx+f(X)\int_{\xi}^{X}\varphi(x)\,dx,$$

et en ajoutant et en retranchant une même quantité facile à voir, on la ramène à la première forme de M. Jordan (p. 90, t. II, 1[re] édit.),

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{x_1}^{X}f(x)\,\varphi(x)\,dx\\&\quad=f(x_0)\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\,dx+[f(X)-f(x_0)]\int_{\xi}^{X}\varphi(x)\,dx.\end{aligned}\right.$$

Enfin, en transposant à gauche le premier terme du second membre de la même équation (6), et en posant

$$f(x) - f(\mathrm{X}) = \psi(x), \tag{9}$$

ce qui donnera une fonction conservant son signe entre les limites de l'intégrale, on aura la formule de M. Bonnet (*voir* Demartres, Ire Partie, p. 109),

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(x_0)\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x)\,dx. \tag{10}$$