Nouvelles annales de mathématiques

O. Böklen

Sur les normales de l'ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 18 (1899), p. 121-125

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1899_3_18__121_1>

[L²8b]

SUR LES NORMALES DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. O. BÖKLEN.

Étant donné un ellipsoïde $\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} + \frac{\zeta^2}{c} - 1 = 0$ et un point M ayant pour coordonnées x, y, z, on sait que l'on peut de ce point mener six normales à la surface, les pieds de ces normales étant déterminés par les équations

$$\xi = \frac{ax}{a+u}, \qquad \eta = \frac{by}{b+u}, \qquad \zeta = \frac{cz}{c+u},$$

où u est une des racines de l'équation

$$(1) \qquad \frac{ax^2}{(a+u)^2} + \frac{by^2}{(b+u)^2} + \frac{cz^2}{(c+u)^2} - 1 = 0.$$

En développant suivant les puissances de u, on a

$$\begin{aligned}
&u^6 \\
&+ u^5(2a + 2b + 2c) \\
&+ u^4(a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4bc + 4ca - ax^2 - by^2 - cz^2) \\
&+ u^3.2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\
&\qquad - a(b+c)x^2 - b(c+a)y^2 - c(a+b)z^2] \\
&+ u^2[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 4abc(a+b+c) - a(b^2+c^2)x^2 \\
&\qquad - b(c^2+a^2)y^2 - c(a^2+b^2)z^2 - 4abc(x^2+y^2+z^2)] \\
&+ u.2abc[ab + bc + ca - (b+c)x^2 - (c+a)y^2 - (a+b)z^2] \\
&+ \ a^2b^2c^2 - abc(bcx^2 + cay^2 + abz^2) = 0.
\end{aligned}$$

La variable u est égale au produit NP, où N désigne une des normales MS, que l'on peut abaisser du point M à l'ellipsoïde, et P la distance du centre O au plan tangent en S. Soient donc u_1, u_2, ..., u_6 les six racines de l'équation (1), N_1, N_2, ..., N_6 les six normales abaissées du point M à l'ellipsoïde, et P_1, P_2, ..., P_6 les distances des six plans tangents aux pieds S_1, S_2, ..., S_6 de ces normales du centre O; alors on a les relations suivantes :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &u_1 + u_2 + \ldots + u_6 \\ &\quad = N_1 P_1 + N_2 P_2 + \ldots + N_6 P_6 = -2(a + b + c). \end{aligned} \right.$$

Donc :

Si l'on abaisse d'un point quelconque les six normales à un ellipsoïde et que l'on forme les six produits de chaque normale et de la distance du plan tangent de son pied au centre de l'ellipsoïde, la somme de ces produits est constante et égale à la moitié de la somme des carrés des axes.

D'après le dernier terme de l'équation (1), on a le théorème

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &u_1 u_2 \ldots u_6 = N_1 P_1 . N_2 P_2 \ldots N_6 P_6 \\ &\qquad = a^2 b^2 c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right); \end{aligned} \right.$$

le produit de ces six paramètres u_1, u_2, ... est donc égal à zéro ou constant, suivant que le point d'où partent les six normales se trouve sur l'ellipsoïde donné ou sur une surface semblable.

Des coefficients de u^4, u^3, u^2, u on peut déduire quatre autres relations semblables; mais il faut remarquer que le signe des produits NP est positif ou négatif selon que les points M et O se trouvent de côtés différents du plan tangent ou du même côté.

Si l'on admet, au contraire, que dans l'équation (1) les quantités x, y, z soient variables et u constant, on obtient une série ou un système Σ d'ellipsoïdes dont chacun correspond à une valeur particulière de u; ils forment cinq groupes, suivant que u se trouve entre les limites $+\infty$ et zéro, zéro et $-c$, $-c$ et $-b$, $-b$ et $-a$, $-a$ et $-\infty$.

Pour $u = -c, -b, -a$ on obtient les sections principales (courbes cuspidales) de la surface de centres de l'ellipsoïde donné ($u = 0$); les ellipsoïdes du second, troisième et quatrième groupe sont inscrits dans cette surface (*voir* mon Mémoire sur la courbure des surfaces, *Crelle*, t. 96, p. 152).

Soient p, q, r les demi-axes d'un ellipsoïde du système Σ, ou, d'après (1),

$$p = \frac{a+u}{\sqrt{a}}, \qquad q = \frac{b+u}{\sqrt{b}}, \qquad r = \frac{c+u}{\sqrt{c}};$$

en éliminant u on a

$$p\sqrt{a} - a = q\sqrt{b} - b = r\sqrt{c} - c; \tag{4}$$

c'est l'équation d'une droite, si l'on regarde p, q, r comme coordonnées cartésiennes, et d'une cubique gauche, si p, q, r sont des coordonnées tangentielles.

En remplaçant, dans l'équation (2), $u_1, u_2, \ldots$ par leurs valeurs tirées de l'équation (4), on trouve

$$\tag{5} \left\{ \begin{aligned} p_1 + p_2 + \ldots + p_6 &= \frac{2}{\sqrt{a}}(\ \ 2a - \ \ b - c), \\ q_1 + q_2 + \ldots + q_2 &= \frac{2}{\sqrt{b}}(-a + 2b - \ \ c), \\ r_1 + r_2 + \ldots + r_3 &= \frac{2}{\sqrt{c}}(\ \ \ a - \ \ b + 2c). \end{aligned} \right.$$

D'où la proposition suivante :

La somme des axes des six ellipsoïdes qui passent par un point M d'où l'on peut mener six normales réelles à un ellipsoïde donné est constante, ces axes étant pris dans l'une ou l'autre des trois directions de coordonnées.

D'un point M on peut mener six, quatre ou deux normales à un ellipsoïde, suivant qu'il est situé au dedans des deux parties F_1 et F_2 de la surface de centres, ou au dedans de l'une et au dehors de l'autre, ou enfin au dehors de toutes les deux.

Des deux courbes, développée d'une ellipse et ellipse (courbe cuspidale), qui sont les intersections de F_1 et F_2 avec les plans des coordonnées, la développée dans l'un de ces plans, l'ellipse dans l'autre, et dans le troisième une partie de la développée et une partie de l'ellipse appartiennent à F_1 ; de même par rapport à F_2.

A l'égard des signes de $p_1, p_2, q_1, \ldots$, dans l'équation (5) il faut distinguer auquel des cinq groupes marqués ci-dessus les ellipsoïdes respectifs appartiennent. Si, par exemple, p_3 est au troisième groupe et p_4 au quatrième, le dernier est négatif, puisque ces deux groupes sont séparés entre eux par une valeur de p égale à zéro.

L'équation (1) présente quelque analogie avec celle des surfaces homofocales

$$(6)\qquad \frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}+\frac{z^2}{c+\lambda}-1=0.$$

En développant suivant les puissances de λ on trouve

$$\begin{aligned}
&\lambda^3\\
&+\lambda^2(a+b+c-x^2-y^2-z^2)\\
&+\lambda\,[ab+bc+ca-(b+c)x^2-(c+a)y^2-(a+b)z^2]\\
&+\quad abc-bcx^2-cay^2-ab\,z^2=\lambda^3+A\lambda^2+B\lambda+C.
\end{aligned}$$

Soient λ_1, λ_2, λ_3 les trois racines de l'équation (6), et $A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $B = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$, $C = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$; on voit que le point M, par lequel passent les trois surfaces homofocales à l'ellipsoïde donné

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

se meut sur une sphère concentrique ou sur un ellipsoïde, selon que les coefficients A, B ou C sont constants. Les surfaces $B =$ const. et $C =$ const. sont les mêmes que celles qui se rattachent aux deux derniers membres de l'équation (1); on peut donc énoncer la proposition suivante en complétant l'équation (3) :

Le produit des six paramètres du système Σ *des six ellipsoïdes passant par un point* M, *ainsi que celui des trois paramètres des surfaces homofocales qui passent par le même point* M, *est égal à zéro ou constant, selon que ce point est situé sur l'ellipsoïde donné ou sur une surface semblable.*

Les limites qui se rapportent aux ellipsoïdes (Σ)

$$+\infty \text{ et zéro,} \quad \text{zéro et } -c, \quad -c \text{ et } -b,$$
$$-b \text{ et } -a, \quad -a \text{ et } -\infty$$

sont les mêmes pour les surfaces homofocales : les deux premiers groupes, $\lambda = +\infty$ et $\lambda = -c$, comprennent les ellipsoïdes, avec l'ellipsoïde donné $\lambda = 0$, et l'ellipse focale $\lambda = -c$; dans le troisième les hyperboloïdes à une nappe avec l'hyperbole focale $\lambda = -b$; dans le quatrième les hyperboloïdes à deux nappes avec l'ellipse imaginaire $\lambda = -a$; et dans le cinquième les surfaces imaginaires.