D. GRAVÉ

Sur les expressions dites surpuissances

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 80-91

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__80_1>

[A3l] [G6c]

SUR LES EXPRESSIONS DITES SURPUISSANCES;

PAR M. D. GRAVÉ, à Saint-Pétersbourg.

Dans le Mémoire intitulé *De formulis exponentialibus replicatis* (³), Euler traite le problème suivant :

Soient les relations

$$\omega_1(x) = a^x, \qquad \omega_2(x) = a^{\omega_1(x)} = a^{a^x},$$
$$\omega_3(x) = a^{\omega_2(x)} = a^{a^{a^x}}, \qquad \ldots,$$

(¹) *Un théorème sur les fonctions itératives* (*Bull. de la Soc. math.*, t. XXIII, 1895).

(²) *Étude sur les équations fonctionnelles*, avril 1897.

(³) *Acta Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ*, pro anno MDCCLXXVII. Pars prior, page 38.

où $a > 0$; nous aurons

$$\omega_n(x) = a^{\omega_{n-1}(x)}.$$

Il faut trouver la fonction limite $\Omega(x)$ vers laquelle tend $\omega_n(x)$ avec l'accroissement du nombre entier n.

Ce problème se trouve complètement résolu dans le Mémoire cité d'Euler. Comme l'auteur ne démontre pas sa solution, j'ai pour but d'exposer ici les résultats d'Euler avec les démonstrations nécessaires.

Dans tout ce qui suit, au lieu de $\omega_k(x)$, écrivons tout simplement x_n. En nous bornant aux valeurs réelles de x, nous pouvons évidemment supposer x positif, car, si l'on avait $x < 0$, on pourrait, au lieu de x, prendre $x_1 = a^x$.

Montrons d'abord que si $a > e^{\frac{1}{e}} = 1,44466\ldots$, on aura, pour $n = \infty$,

$$\lim \{x_n\} = \infty.$$

En effet, d'après des considérations bien connues,

$$\frac{\log x}{x} \leqq \frac{1}{e},$$

d'où, pour le cas considéré,

$$\frac{\log x}{x} < \log a,$$

ou

$$x < a^x,$$

c'est-à-dire

$$x < x_1.$$

Ainsi nous voyons que l'on a

$$x < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n.$$

Démontrons que toutes les différences

$$x_{k+1} - x_k = a^{x_k} - x_k$$

sont plus grandes qu'un certain nombre positif.

En considérant la fonction $\varphi(x) = a^x - x$, formons sa dérivée $\varphi'(x) = a^x \log a - 1$. Nous voyons que, si $a > e$, la dérivée est positive et la fonction $\varphi(x)$ a sa moindre valeur pour $x = 0$; mais on a

$$\varphi(0) = 1,$$

d'où il suit que $\varphi(x) > 1$.

Si $e^{\frac{1}{e}} < a < e$, la dérivée s'annule pour

$$x = -\frac{\log \log a}{\log a}$$

et nous obtenons

$$a^x - x > \frac{1 + \log \log a}{\log a}.$$

En désignant par α le nombre positif $\frac{1 + \log \log a}{\log a}$, nous aurons

$$\varphi(x) > \alpha,$$

c'est-à-dire que toutes les différences $x_{k+1} - x_k$ sont plus grandes que α. Ainsi nous voyons que x_n croît sans limites avec le nombre n.

Prenons à présent le cas suivant $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$. L'équation $a^x = x$ a dans ce cas deux racines réelles, une entre 1 et e et l'autre entre e et ∞. Désignons la première racine par λ et l'autre par μ.

La fonction $x_1 - x = a^x - x = \varphi(x)$ pour $x = 0$ et pour $x = \infty$ est positive; il ne reste qu'à étudier ses valeurs pour toutes les valeurs positives de x. Formons la dérivée $\varphi'(x) = a^x \log a - 1$, et désignons sa racine positive par x_0; nous obtenons évidemment

$$a^{x_0} = \frac{1}{\log a}.$$

Comme $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, on a

$$0 < \log a < \frac{1}{e},$$

d'où

$$\frac{1}{\log a} > e:$$

on aura

$$a^{x_0} > e,$$

ou

$$x_0 \log a > 1.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x)$ décroît dans l'intervalle de o jusqu'à x_0, atteint sa valeur minimum pour x_0 et commence à croître pour tous les $x > x_0$.

En substituant x_0 dans l'expression pour la fonction $\varphi(x)$, nous obtiendrons

$$\varphi(x_0) = a^{x_0} - x_0 = \frac{1}{\log a} - x_0 = \frac{1 - x_0 \log a}{\log a} < 0;$$

par conséquent l'équation $\varphi(x) = 0$ a deux racines simples, une entre o et x_0 et l'autre entre x_0 et ∞.

Il est facile de voir que les racines réelles de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont séparées par le nombre e. En effet, en substituant e à x, nous obtenons

$$\varphi(e) = a^e - e < \left[e^{\frac{1}{e}}\right]^e - e = 0.$$

Considérons trois intervalles de o à λ, de λ à μ et de μ à ∞.

La fonction $\varphi(x)$ est positive dans le premier et le troisième intervalle et négative dans le second. Par conséquent, si nous prenons la valeur initiale x dans le premier ou le troisième intervalle, les valeurs consécutives x_k croissent avec k. Au contraire, si la valeur de x se trouve dans le second intervalle, les nombres x_k décroissent.

En posant $x = \mu + \delta$, où $\delta > 0$, nous aurons

$$a^{\mu+\delta} - \mu - \delta = (a^{\delta} - 1)\mu - \delta < \delta(\log \mu - 1).$$

Ainsi nous voyons que $x_{k+1} - x_k > \delta(\log \mu - 1)$, de sorte que, quelque petit que soit δ pour $x > \mu$, on aura

$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = \infty.$$

Comme $a > 1$, il s'ensuit que

$$a^x < a^\xi$$

si $x < \xi$. En prenant, au lieu de ξ, la racine λ, on aura, pour $x < \lambda$,

$$a^x < a^\lambda,$$

c'est-à-dire

$$x_1 < \lambda_1.$$

Ainsi nous remarquons que $x_n < \lambda$; mais comme, pour $x < \lambda$, on a

$$x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1 > x,$$

nous voyons que x_n, avec l'augmentation de n, tend vers une limite qui ne surpasse pas λ; mais comme cette limite doit être égale à l'une des racines de l'équation $a^x = x$, par conséquent cette limite doit être égale à λ, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = \lambda.$$

De la même façon, nous démontrerons que, si x se trouve entre λ et μ, on aura

$$x > x_1 > x_2 > \ldots > x > \ldots > \lambda,$$

et, par conséquent,

$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = \lambda.$$

Si $x = \mu$, on aura

$$x = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \mu,$$

et, par suite,

$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = \mu.$$

Le cas limite $a = e^{\frac{1}{e}}$ donne

$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = e$$

pour $x \leqq e$,

$$\lim \{x_n\}_{n=\infty} = \infty$$

pour $x > e$.

Passons à présent au cas $a < 1$.

En considérant la fonction $\varphi(x)$, nous remarquons que la dérivée de cette fonction pour $a < 1$ est constamment négative; par conséquent la fonction est décroissante; elle est positive pour $x = 0$ et négative pour $x = 1$, donc elle a une racine réelle comprise entre 0 et 1.

Nous désignerons cette racine par λ.

Considérons à présent l'équation

$$(1) \qquad a^{a^x} = x.$$

Cette équation n'a pas évidemment de racines réelles quand $a > e^{\frac{1}{e}}$; pour $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ les deux racines λ et μ de l'équation $a^x = x$ sont les seules racines de l'équation (1).

En restant toujours dans le cas $a < 1$, et en posant $a = \frac{1}{b}$, nous obtiendrons $b > 1$.

Prenons la fonction $\psi(x) = a^{a^x} - x$.

En posant $y = a^x$, nous pouvons écrire la dérivée $\psi'(x)$ sous la forme

$$\psi'(x) = a^y y \log^2 a - 1 = b^{-y} y \log^2 b - 1.$$

La seconde dérivée sera

$$\psi''(x) = \log^3 a a^y y (1 + \log a y) = -\log^3 b b^{-y} y (1 - \log b y).$$

Si l'on suppose $b < e$, on aura

$$1 - \log b b^{-x} > 0.$$

et nous obtiendrons

$$\psi''(x) < 0;$$

par conséquent, la première dérivée $\psi'(x)$ est une fonction décroissante. Mais on a

$$\psi'(0) = \frac{\log^2 b}{b} - 1 < 0,$$

d'où

$$\psi'(x) < 0.$$

La fonction $\psi(x)$ décroît et, comme on a

$$\psi(0) = a > 0, \qquad \psi(1) - a^a - 1 < 0,$$

elle devient nulle pour la racine λ de l'équation $a^x = x$.

Pour le cas $b > e$, l'équation $\psi''(x) = 0$ admet une racine réelle entre 0 et 1; cette racine est égale à

$$x_0 = \frac{\log \log b}{\log b}.$$

Pour $0 \leqq x < x_0$, on a

$$\psi''(x) > 0;$$

mais, pour $x_0 < x \leqq 1$, on a

$$\psi''(x) < 0.$$

Dans le premier intervalle la fonction $\psi'(x)$ croît en partant de la valeur $\frac{\log^2 b}{b} - 1$ qui est négative pour toutes les valeurs de b et atteint la valeur maximum pour $x = x_0$. Après cette valeur la fonction commence à décroître.

Si $\psi'(x_0) < 0$, la fonction $\psi'(x)$ sera négative pour toutes les valeurs de x, et par conséquent la fonction $\psi(x)$ a la racine unique λ qui sera en même temps celle de l'équation $a^x = x$.

Si l'on a $\psi'(x_0) > 0$, il n'est pas difficile de se convaincre que l'équation $\psi(x) = 0$, outre la racine de l'équation $a^x = x$, en admet deux autres. Mais, comme on a

$$\psi'(x_0) = \frac{1}{e}\log b - 1,$$

démontrons que si $\log b > e$, l'équation $\psi(x) = 0$ aura deux racines réelles comprises entre 0 et 1, distinctes de λ.

Dans ce cas

$$b > e^e, \qquad a < \frac{1}{e^e} = 0{,}065948\ldots.$$

La fonction $\psi(x)$ a évidemment une racine λ qui appartient à l'équation $a^x = x$. Substituons cette racine dans l'expression de la première dérivée; on aura la relation

$$\psi'(\lambda) = \lambda^2 \log^2 b - 1 = \log^2 \lambda - 1 \geqq 0,$$

où $\psi'(\lambda)$ devient nulle pour $b = e^e$, $\lambda = \frac{1}{e}$, et $\psi'(\lambda)$ est positive pour $b > e^e$.

Par conséquent, il vient, pour ε infiniment petit positif,

$$\psi(\lambda - \varepsilon) < 0, \qquad \psi(\lambda + \varepsilon) > 0.$$

Mais, en tenant compte des inégalités

$$\psi(0) > 0, \qquad \psi(1) < 0,$$

nous arrivons à ce résultat que l'équation $\psi(x) = 0$ a deux autres racines réelles, une entre 0 et λ et l'autre entre λ et 1. En désignant la première racine par λ_1 et la seconde par λ_2, nous aurons

$$\lambda_2 > \lambda_1, \qquad \lambda_2 = a^{\lambda_1}, \qquad \lambda_1 = a^{\lambda_2}.$$

Ainsi nous voyons que, pour le cas $\frac{1}{e^e} \leqq a < 1$, on aura

$$a^{x_k} \gtrless a^\lambda,$$

si $x_k \gtrless \lambda$; mais $a^{x_k} = x_{k+1}$ et $a^\lambda = \lambda$, d'où

$$x_{k+1} \lessgtr \lambda.$$

Quand $x < \lambda$, on aura évidemment

$$\begin{array}{lllll} x < \lambda, & x_2 < \lambda, & x_4 < \lambda, & \ldots, & x_{2n} < \lambda, \\ & x_1 > \lambda, & x_3 > \lambda, & \ldots, & x_{2n+1} > \lambda. \end{array}$$

Comme la fonction $\psi(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$, on aura les inégalités

$$\begin{aligned} x_{2k+2} - x_{2k} &= \psi(x_{2k}) > 0, \\ x_{2k+1} - x_{2k-1} &= \psi(x_{2k-1}) < 0, \end{aligned}$$

et nous remarquons que les expressions avec indices pairs croissent en restant toujours plus petites que λ; par conséquent elles tendent vers une limite. De même façon, les expressions avec indices impairs décroissent en restant plus grandes que λ et tendent vers une limite fixe. Il est évident que ces expressions ne peuvent pas avoir une autre limite que la racine de la fonction $\psi(x)$ et, par conséquent,

$$\lim \{x_{2n}\}_{n=\infty} = \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty} = \lambda.$$

Pour $x > \lambda$, les raisonnements sont les mêmes. Les expressions avec les indices pairs s'approchent de la limite λ en décroissant.

Prenons le dernier cas $a < \frac{1}{e^e}$.

Considérons quatre intervalles

$$\mathrm{I}(0, \lambda_1), \quad \mathrm{II}(\lambda_1, \lambda), \quad \mathrm{III}(\lambda, \lambda_2), \quad \mathrm{IV}(\lambda_2, +\infty).$$

Les signes des fonctions φ et ψ pour ces intervalles composent la Table suivante :

	I.	II.	III.	IV.	
$\varphi(x)$	+	+	—	—	
$\psi(x)$	+	—	+	—	

La Table des signes de la fonction montre que la racine λ se trouve toujours entre deux nombres consécutifs de notre série

$$x, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots.$$

Nous allons établir que les nombres avec des indices pairs ou infinis doivent se trouver dans un même intervalle. En effet, si x se trouve dans le premier intervalle, x_1 doit être dans le quatrième, et *vice versa*.

Cela peut être démontré de la manière suivante : Si $x < \lambda_1$, nous aurons

$$a^x > a^{\lambda_1},$$

ou, en d'autres termes,

$$x_1 > \lambda_2,$$

et *vice versa;* si $x > \lambda_2$, on aura

$$x_1 < \lambda_1.$$

Nous remarquons que toutes les valeurs x_{2k} à indices pairs seront comprises dans un même intervalle, et toutes les autres x_{2k+1} dans un autre.

Si x se trouve dans le second intervalle, toutes les valeurs x_{2k} seront dans le même intervalle, mais tous les nombres à indices impairs seront dans le troisième intervalle, et *vice versa*.

En effet, si

$$\lambda_1 < x < \lambda,$$

on aura

$$a^{\lambda_1} > a^x > a^{\lambda}$$

ou

$$\lambda_2 > x_1 > \lambda.$$

De même façon, si

$$\lambda < x < \lambda_2,$$

on aura

$$a^{\lambda} > a^x > a^{\lambda_2}$$

ou

$$\lambda > x_1 > \lambda_1.$$

De tout ce qui précède nous pouvons conclure que, si x se trouve dans les deux premiers intervalles I, II, on aura

$$\lim \{x_{2n}\}_{n=\infty} = \lambda_1, \qquad \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty} = \lambda_2.$$

Pour les intervalles III, IV, où $x > \lambda$, on a

$$\lim \{x_{2n}\}_{n=\infty} = \lambda_2, \qquad \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty} = \lambda_1.$$

On peut résumer les résultats obtenus dans le théorème que voici :

THÉORÈME. — *La fonction limite $\Omega(x)$ se détermine de la manière suivante :*

1. $a > e^{\frac{1}{e}}$,

$\Omega(x) = \infty$ pour toutes les valeurs réelles de x.

2. $1 < a \leqq e^{\frac{1}{e}}$,

$\Omega(x) = \lambda$	pour	$-\infty < x < \mu$,
$\Omega(\mu) = \mu$	»	$x = \mu$,
$\Omega(x) = \infty$	»	$\mu < x < +\infty$.

3. $\frac{1}{e^e} \leqq a \leqq 1$,

$$\Omega(x) = \lambda.$$

4. $0 < a < \frac{1}{e^e}$; en écrivant

$$\Omega_1(x) = \lim \{x_{2n}\}_{n=\infty}, \qquad \Omega_2(x) = \lim \{x_{2n+1}\}_{n=\infty};$$

$$\begin{array}{llcl} \Omega_1(x) = \lambda_1, & \Omega_2(x) = \lambda_2 & \text{pour} & -\infty < x < \lambda, \\ \Omega_1(\lambda) = & \Omega_2(\lambda) = \lambda & \text{»} & x = \lambda, \\ \Omega_1(x) = \lambda_2, & \Omega_2(x) = \lambda_1 & \text{»} & \lambda < x < +\infty. \end{array}$$

Il n'est pas difficile de trouver la proposition concernant les opérations inverses.

Désignons par $\mathrm{Log}_a x$ le logarithme du nombre x pris dans le système ayant pour base a.

Considérons la série des nombres

$$x_1 = \mathrm{Log}_a x, \qquad x_2 = \mathrm{Log}_a x_1, \qquad \ldots \qquad x_n = \mathrm{Log}_a x_{n-1}.$$

Si, dans le calcul des nombres consécutifs, nous parvenons à un nombre négatif x_k, le nombre suivant $x_{k+1} = \mathrm{Log}_a x_k$ sera évidemment imaginaire.

Désignons par $\psi(x)$ la limite vers laquelle tend

$$\mathrm{Log}_a \,\mathrm{Log}_a \ldots \mathrm{Log}_a \,\mathrm{Log}_a x,$$

avec augmentation indéfinie du nombre d'opérations consécutives.

Considérons le cas $1 \leqq a \leqq e^{\frac{1}{e}}$.

Cette limite $\psi(x)$ est égale à μ pour $\lambda < x < +\infty$; elle est égale à λ pour $x = \lambda$.

Pour le cas $0 < a < \frac{1}{e}$, on aura

$$\psi(x) = \lambda \qquad \text{pour} \qquad \lambda_1 < x < \lambda_2.$$