NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. GALLUCCI

Sur une propriété focale des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 74-75

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__74_1>

[L[1]7d]

SUR UNE PROPRIÉTÉ FOCALE DES CONIQUES;

PAR M. G. GALLUCCI.

1. *Deux tangentes quelconques d'une conique et les perpendiculaires abaissées des foyers sur ces tangentes touchent une autre conique.*

Soient AB, AC les deux tangentes, F, F′ les deux foyers, R, Q, R′, Q′ leurs projections sur AB, AC et M la projection de A sur l'axe focal FF′ ([1]). Les points A, M, R, Q sont sur le cercle décrit sur AF comme diamètre et les points A, M, R′, Q′ sur le cercle décrit sur AF′ comme diamètre; mais R, Q, R′, Q′ sont sur la podaire des foyers; donc les trois droites RQ, R′Q′, AM concourent en un point A_1 qui est le centre radical des trois cercles précédents. La droite AM est donc la polaire du point $A' \equiv RQ'.R'Q$ par rapport à la podaire des foyers et, par conséquent, ce point doit se trouver sur le diamètre perpendiculaire à AM, c'est-à-dire sur FF′. Il résulte de tout cela que l'hexagone des droites AB, RF, QF, AC, F′Q′, F′R′ est un hexagone de Brianchon.

2. Dans un triangle ABC, soient F, F′ deux points inverses, P, Q, R, P′, Q′, R′ leurs projections sur BC, CA, AB; posons : $A' \equiv RQ'.R'Q$, $B' \equiv RP'.R'P$,

([1]) Le lecteur est prié de faire la figure.

$C' \equiv PQ'.P'Q$, $A_1 \equiv RQ.R'Q'$, $B_1 \equiv RP.R'P'$, $C_1 \equiv PQ.P'Q'$. On a les propriétés suivantes :

1° *Les points* A', B', C' *sont sur* FF' ;

2° *Les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *sont perpendiculaires à* FF' ;

3° *La droite* AA' *passe par* B_1 *et* C_1 ; *de même* BB' *passe par* C_1 *et* A_1 *et* CC' *passe par* A_1 *et* B_1 ;

4° *Le triangle* $A_1B_1C_1$ *est conjugué par rapport au cercle des points* P, Q, R, P', Q', R' ;

5° *Le triangle* ABC *et celui des droites* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *sont réciproques par rapport au même cercle* ;

6° *Les droites* $P'A_1$, $Q'B_1$, $R'C_1$ *concourent sur le même cercle, ainsi que les droites* PA', QB', RC'.

Les propriétés 1° et 2° sont établies par le raisonnement précédent; les autres s'en déduisent très facilement. Toutes ces propriétés ont été données par H. Schröter dans le cas particulier où P, Q, R sont les milieux des côtés et P', Q', R' les pieds des hauteurs.

Voir : Schröter, *Steiner's Vorlesung über Geometrie,* 2e Partie, p. 84; Franke, *Ueber gewisse Linien im Dreiecke* (*Journal de Crelle,* vol. 99, p. 161); Schröter, *Bemerkung zu dem Aufsatze von Herrn Franke* (*Journal de Crelle,* vol. 99, p. 233).