NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULIUS PETERSEN

Démonstration d'un théorème relatif à l'intégration d'expressions différentielles algébriques et d'équations différentielles algébriques, sous forme finie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 6-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__6_0>

[C2k] [H2a]

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME RELATIF A L'INTÉGRATION D'EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES, SOUS FORME FINIE ;

PAR M. JULIUS PETERSEN, de Copenhague.

Extrait des *Gottinger Nachrichten*, 1878, n° 3.

Traduit de l'allemand par M. L. LAUGEL.

Relativement à l'intégration d'une expression différentielle algébrique se présente la question suivante :

Quelle forme une telle expression doit-elle avoir, pour qu'il soit possible de représenter son intégrale au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques, sous forme finie?

Cette question, résolue par Abel dans des cas particuliers, est, elle-même. un cas particulier d'une question plus générale.

En premier lieu, au lieu de la fonction logarithmique, on peut se donner un nombre fini, d'ailleurs aussi grand que l'on voudra, de fonctions transcendantes, qui, liées entre elles et à des fonctions algébriques, devront être employées à la représentation de l'intégrale.

Dans cette hypothèse générale, on peut également parler d'une représentation sous forme finie, pourvu que chacune des fonctions n'entre qu'un nombre fini de fois dans l'expression de l'intégrale. Relativement aux fonctions transcendantes, nous nous en tiendrons à l'hypothèse qu'elles sont définies par des équations différentielles algébriques du premier ordre pour lesquelles il existe un multiplicateur algébrique.

En second lieu, au lieu de la fonction intégrale précitée, l'on peut supposer qu'on demande l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, ce qui conduit à la question suivante : *Les variables x, y sont liées entre elles par une équation différentielle algébrique du premier ordre; sous quelle condition est-il alors possible de donner à l'intégrale générale de cette équation différentielle la forme $u = f(x, y, c) = 0$, où c désigne la constante d'intégration, tandis que u peut être représenté sous forme finie, au moyen de fonctions algébriques et d'un nombre fini de fonctions transcendantes données du type précité.*

Cette question, étendue au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes, trouve sa réponse dans le théorème que nous allons démontrer.

1. Une fonction algébrique d'un ou de plusieurs arguments sera définie comme racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions rationnelles entières des arguments.

Les dérivées d'une fonction algébrique sont encore des fonctions algébriques des arguments.

Nous nommerons fonctions *hyperalgébriques* des fonctions telles que leurs dérivées soient des fonctions algébriques des arguments. Telles sont, par exemple, $\log x$, $\arcsin x$, les intégrales elliptiques, etc. Les fonctions algébriques sont donc comprises, comme cas particulier, parmi les fonctions hyperalgébriques.

2. Toute équation différentielle du premier ordre à une variable dépendante ω et à n variables indépendantes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ peut être ramenée à la forme

$$(1)\qquad d\omega + N_1\,dv_1 + N_2\,dv_2 + \ldots + N_n\,dv_n = 0,$$

où $N_1, N_2, \ldots, N_n$ désignent des fonctions *algébriques* des grandeurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et ω, qui satisfont aux conditions d'intégrabilité connues.

L'équation (1) détermine, en général, ω comme fonction transcendante des n arguments $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Si les grandeurs N dépendent explicitement seulement des grandeurs v, mais non de ω, alors ω est une fonction hyperalgébrique des grandeurs v.

Nous désignerons par φ un multiplicateur du premier membre de l'équation (1), et par U la fonction de $v_1, v_2, \ldots, v_n, \omega$ qui satisfait aux équations

$$(2)\qquad \frac{\partial U}{\partial \omega} = \varphi, \qquad \frac{\partial U}{\partial v_1} = \varphi N_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial U}{\partial v_n} = \varphi N_n.$$

Tandis qu'une partie des recherches suivantes sont valables d'une manière générale, dans les n^{os} 7 et suivants, nous ferons l'hypothèse particulière que, parmi les multiplicateurs en nombre infini, il en existe *un* qui soit une fonction *algébrique* des grandeurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et ω.

3. Si les variables $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dont dépend la fonction transcendante ω considérée dans le n^{o} 2, sont des fonctions algébriques d'autres variables $w_1, w_2, \ldots, w_m$, que l'on doit regarder comme variables indépendantes au lieu des grandeurs v, la transcendante ω devient une fonction des grandeurs w.

Une expression qui renferme seulement des fonctions algébriques d'une ou plusieurs grandeurs ω et de leurs arguments w sera dite une fonction transcendante des grandeurs w *du premier échelon*.

Une fonction transcendante du premier échelon, dont les arguments w sont eux-mêmes des fonctions transcendantes du premier échelon par rapport à d'autres variables (qui doivent être regardées comme variables indépendantes, au lieu des grandeurs w), sera dite une fonction transcendante du *second échelon* par rapport à ces nouveaux arguments.

On peut, de cette façon, définir des fonctions transcendantes d'un échelon aussi élevé que l'on veut.

Lorsque l'on considère une telle fonction, on peut désormais supposer : 1° qu'aucune des transcendantes en question ne soit réductible à un échelon moins élevé, c'est-à-dire qu'aucune de ces transcendantes ne soit une fonction algébrique de transcendantes du même type qui soient toutes d'échelon moins élevé que cette transcendante même ; et 2° que le nombre des transcendantes de l'échelon le plus élevé soit aussi petit que possible, c'est-à-dire qu'entre ces dernières et les transcendantes d'échelon moins élevé aucune équation algébrique ne puisse avoir lieu. En effet, si les hypothèses définies (1° et 2°) n'étaient pas vérifiées, l'expression considérée serait réductible à une autre plus simple, pour laquelle ces hypothèses seraient alors vérifiées.

De ce qui précède, il s'ensuit que toute équation algébrique, entre les transcendantes précitées d'échelon le plus élevé et d'autres transcendantes d'échelon moins élevé, doit être identiquement vérifiée par rapport aux premières. En effet, si tel n'était pas le cas, une telle équation pourrait servir à éliminer de l'expression l'une des transcendantes et, par suite, à simplifier cette expression.

4. Soit

$$(3) \qquad dy = P_1\,dx_1 + P_2\,dx_2 + \ldots + P_k\,dx_k$$

une équation différentielle *algébrique* donnée du premier ordre. Les grandeurs P sont, par conséquent, des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et y qui satisfont aux conditions d'intégrabilité. Nous supposerons qu'il est possible de mettre l'intégrale générale de cette équation différentielle sous la forme

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) = \text{const.},$$

où f est une fonction algébrique de ses arguments et où les grandeurs ω sont des fonctions transcendantes d'échelon quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et de y. On posera maintenant

$$(4) \qquad u = F(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, \omega),$$

en désignant une des transcendantes de l'échelon le plus élevé par ω, et, en désignant par le signe F toute autre dépendance relative aux arguments x et y, dépendance de ces seuls arguments en ce sens que les autres grandeurs ω dépendent de y et des grandeurs x (F est, par suite, une fonction algébrique par rapport à ω).

Ici, toutefois, il est fait exception du cas pour lequel on a

$$(5) \qquad u = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + u_1,$$

où u_1 est une fonction algébrique et où $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ sont des fonctions hyperalgébriques, tandis que, parmi les arguments de ces fonctions, il peut se présenter des fonctions transcendantes de l'échelon secondaire (le plus élevé, moins un).

Dans ce cas d'exception, ω désignera l'une des transcendantes en question, d'échelon secondaire, de sorte que u_1 est une fonction algébrique de ω, et que Ψ_1, Ψ_2, ... en sont des fonctions hyperalgébriques. Par conséquent, dans tous les cas, ω peut se présenter dans $\frac{\partial u}{\partial \omega}$ seulement algébriquement et à côté de transcendantes du même échelon ou d'échelons inférieurs.

Dans les différentiations qui suivent, par $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ on entendra toujours $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, en attribuant au symbole ∂ la signification suivante : c'est une dérivée partielle par rapport à une certaine variable, *en tant que celle-ci se trouve explicitement parmi les arguments de la fonction;* nous écrirons, par conséquent, par exemple

$$\frac{du}{dx_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{d\omega}{dx_i}.$$

Les conditions pour que l'équation différentielle (3) soit intégrée d'une manière générale par l'équation (4) sont

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{d\omega}{dx_i} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{d\omega}{dy}\right)P_i = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \end{cases}$$

Par rapport à la transcendante ω, ces équations sont des équations algébriques; par suite des hypothèses posées au n° 3, ces équations doivent donc être identiquement vérifiées. On peut, par conséquent, différentier par rapport à ω et l'on obtient

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial \omega} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}\dfrac{d\omega}{dx_i} + \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{\partial}{\partial \omega}\left(\dfrac{d\omega}{dx_i}\right) \\ \quad + \left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial \omega} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}\dfrac{d\omega}{dy} + \dfrac{\partial u}{\partial \omega}\dfrac{\partial}{\partial \omega}\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right)\right]P_i = 0. \end{cases}$$

Multiplions le premier membre de cette équation par α, fonction de x_1, x_2, ... et de y, qui devra être déterminée plus tard, et posons

$$\beta = \alpha \frac{\partial u}{\partial \omega}.$$

On a alors

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_i} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial \omega} \right) + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial \omega} \right) + \frac{\partial u}{\partial \omega} \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Si l'on détermine maintenant la fonction α au moyen des équations

$$(8) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right), \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \alpha \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)$$

(la possibilité de cette détermination sera démontrée plus tard), on pourra écrire les équations (7) comme il suit

$$(9) \qquad \frac{\partial \beta}{\partial x_i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} P_i = 0,$$

c'est-à-dire, lorsque nous remplaçons P_i par $\frac{\partial y}{\partial x_i}$,

$$\beta = \text{const.}$$

De là résulte que, lorsque α vérifie les équations (8), $\beta = c$ est, soit une identité, soit une nouvelle forme de l'équation intégrale de (3).

Il s'agit maintenant de démontrer qu'il existe toujours une infinité de fonctions α qui vérifient les équations (8). Posons, à cet effet, $\alpha = \frac{1}{\varphi}$, et nous obtiendrons, x pouvant désigner aussi bien x_i que y,

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial v_2} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots \right).$$

Mais, par suite de l'équation (1),

$$\frac{\partial \omega}{\partial v_1} = -N_1, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial v_2} = -N_2, \qquad \ldots,$$

et, par conséquent, puisque les grandeurs $\frac{\partial v}{\partial x}$ ne renferment pas ω,

$$o = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\left(\frac{\partial N_1}{\partial \omega}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \omega}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots\right).$$

Cette équation est satisfaite lorsque φ est un multiplicateur de (1); dans ce cas, en effet, l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots,$$

où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v_1} = \frac{\partial (N_i \varphi)}{\partial \omega} = N_i \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \varphi \frac{\partial N_i}{\partial \omega},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + N_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + N_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots\right)$$
$$+ \varphi\left(\frac{\partial N_1}{\partial \omega}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \omega}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots\right).$$

Or, comme la première parenthèse dans le second terme de la précédente formule est identiquement nulle, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi\left(\frac{\partial N_1}{\partial \omega}\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \omega}\frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots\right) = o.$$

Par conséquent, si φ est un multiplicateur de (1), $\alpha = \frac{1}{\varphi}$ *satisfait aux équations* (8).

On a donc ainsi démontré le théorème suivant :

Lorsque l'équation différentielle à une variable dépendante

$$dy = P_1\, dx_1 + P_2\, dx_2 + \ldots + P_k\, dx_k$$

a pour intégrale

$$u = F(x_1, x_2, \ldots, y, \omega) = c,$$

ou bien

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + u_1 = c,$$

où ω *est une des transcendantes de l'échelon le plus élevé, ou, dans le deuxième cas, de l'échelon secondaire, alors*

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = c\varphi \tag{10}$$

est, soit une identité, soit une nouvelle forme de l'équation intégrale.

5. Les équations de condition (6) sont des identités par rapport à ω. Les dérivées $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ renferment les constantes d'intégration de la fonction, non explicitement, mais seulement en ce sens que les dérivées sont des fonctions données de ω.

On peut donc attribuer aux constantes renfermées dans ω *une valeur quelconque, sans que, pour cela,* $u = c$ *cesse d'être une équation intégrale de* (3).

6. Si *u n'est pas* de la forme

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + u_1,$$

et si (10) n'est pas une identité, on a deux formes de l'équation intégrale

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \omega} = c_1 \qquad \text{et} \qquad u = c;$$

on doit, par conséquent, avoir

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial u}{\partial \omega} = \Psi(u), \tag{11}$$

où Ψ est une fonction inconnue. De là résulte que l'on a

$$\int \frac{du}{\Psi(u)} = \int \varphi\, d\omega. \tag{12}$$

Le cas où (10) est une identité est compris dans ce cas, $\Psi(u)$ étant alors une constante. Dans $\int \varphi\, d\omega$, ω seul doit être pris comme variable.

La grandeur, dans le premier membre, est une fonction de u. Soit (ω) la valeur de ω que nous pouvons tirer de $u = c$; on a

$$(13) \qquad \int_c^u \frac{du}{\Psi(u)} = \int_{(\omega)}^{\omega} \varphi\, d\omega,$$

en sorte que

$$(14) \qquad \int_{(\omega)}^{\omega} \varphi\, d\omega = c$$

est une nouvelle équation intégrale. La grandeur (ω) ne renferme pas ω, mais est une fonction algébrique des transcendantes restantes.

On obtient, par intégration de (1),

$$(15) \quad \int_a^{\omega} \varphi\, d\omega + \int_b^{v_1} [\varphi N_1]_a\, dv_1 - \int_c^{v} [\varphi N_2]_{a,b}\, dv_2 + \ldots = 0,$$

où a, b, c, ... sont des constantes quelconques et où $[\varphi N_h]_{a,b,\ldots}$ indique que l'on remplace ω par a, v_1 par b, et ainsi de suite. Par suite de cette équation, l'équation intégrale (14) se transforme en

$$(16) \qquad \int_a^{(\omega)} \varphi\, d\omega + \int_b^{v_1} [\varphi N_1]_a\, dv_1 - \ldots = \text{const.}$$

7. Maintenant, nous admettrons ici une restriction, en supposant que, parmi les multiplicateurs φ de l'équation différentielle (1), il y en ait un qui soit une fonction algébrique de ω, v_1, v_2, ... (cette hypothèse s'applique aussi aux équations différentielles qui définissent les transcendantes restantes ω_i). Dans l'équation qui

détermine ω,

$$U = c.$$

U est alors une fonction hyperalgébrique de ω, v_1, v_2, ...
Comme l'équation intégrale (16) est formée au moyen de $U = c$, lorsque l'on remplace ω par (ω) (le fait que cette substitution fournisse une nouvelle forme de l'équation intégrale est aussi chose évidente), son premier membre est une fonction hyperalgébrique de (ω), v_1, v_2, ...; et ω ne se présente pas parmi ces grandeurs.

On peut donner, par conséquent, à l'équation intégrale, dans tous les cas, la forme

$$\Psi = \text{const.} \tag{17}$$

où Ψ est une fonction hyperalgébrique de ses arguments [la forme (5) est aussi évidemment renfermée dans (17)]. Maintenant, si ω_ι est une des transcendantes d'échelon le plus élevé, comprises sous le signe fonctionnel Ψ, on a dans la relation

$$\frac{1}{\varphi_\iota}\frac{\partial \Psi}{\partial \omega_\iota} = c_\iota$$

soit une identité, soit une nouvelle forme de l'équation intégrale. La dernière alternative n'est pas possible car, dans cette équation, il ne se présente aucune nouvelle transcendante, ni ω non plus, tandis que l'on avait supposé qu'il est impossible de diminuer le nombre de transcendantes d'échelon le plus élevé se présentant dans $u = c$. Nous devons donc avoir identiquement

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \omega_\iota} = c_\iota \varphi_\iota \tag{18}$$

et, par conséquent,

$$\Psi = c_\iota \int_a^{\omega_\iota} \varphi_\iota \, d\omega_\iota + [\Psi]_{\omega_\iota = a}, \tag{19}$$

relation où a est une constante quelconque. Ici l'intégrale, au moyen de l'équation qui détermine ω_i, peut être transformée en $[U_i]_{\omega_i=a}$. Et u conserve sa forme

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots.$$

Nous en concluons que u ne peut avoir sa forme la plus simple tant qu'il se présente des transcendantes sous les signes des fonctions hyperalgébriques.

Par conséquent :

Lorsqu'une équation différentielle algébrique du premier ordre à une variable dépendante possède l'intégrale $u = c$, où u est exprimable au moyen d'une superposition quelconque de transcendantes du type précité, alors, sous sa forme la plus simple, u est égal à une somme de fonctions hyperalgébriques du premier échelon.

8. Jusqu'ici nous avons seulement envisagé la forme de l'équation intégrale $u = c$; mais nous pouvons démontrer que le cas où l'équation intégrale de (3) a la forme

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, y, c) = 0$$

peut se ramener au cas traité.

En effet, si u est une fonction hyperalgébrique, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Lorsque c ne s'évanouit pas identiquement de cette équation, celle-ci est une nouvelle forme de l'équation intégrale; mais u n'aurait pas alors sa forme la plus simple. Mais si c s'évanouit identiquement de cette équation, (3) est aussi vérifiée pour $u = c_1$, et alors, si l'on attribue à c une valeur arbitraire, on retombe sur la forme traitée précédemment.

Au contraire, si

$$u = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, y, \omega, c) = 0$$

est une fonction algébrique de ω, tirons de l'équation $u = 0$ la valeur $\omega = (\omega)$ et portons cette valeur dans l'équation $\mathrm{U} = 0$ qui détermine ω. Nous obtenons ainsi une nouvelle forme de l'équation intégrale

$$[\mathrm{U}]_{\omega=(\omega)} = 0.$$

Maintenant comme U est une fonction hyperalgébrique nous voyons, comme dans le premier cas, que

$$[\mathrm{U}]_{\omega=(\omega)} = \text{const.}$$

satisfait également à l'équation donnée.

9. L'équation donnée était

$$dy = \mathrm{P}_1\, dx_1 + \mathrm{P}_2\, dx_2 + \ldots.$$

De $u = c$ nous tirons

$$(20) \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\, dy + \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx_2 + \ldots = 0.$$

Par conséquent $\frac{\partial u}{\partial y}$ est un multiplicateur et, au moyen de la forme trouvée pour u, nous voyons que ce multiplicateur est une fonction algébrique. Nous pouvons, en outre, démontrer qu'une certaine puissance de ce multiplicateur est une fonction rationnelle des grandeurs x, P et y.

En effet, soit φ ce multiplicateur ; on a

$$(21) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mathrm{P}_i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi \frac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial y} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

d'autre part, soit

$$(22) \qquad \mathrm{V} = \varphi^n + \mathrm{A}_1 \varphi^{n-1} + \mathrm{A}_2 \varphi^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0$$

l'équation algébrique *irréductible* à laquelle satisfait φ, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, y, P_1, P_2, \ldots$.

Des deux équations on tire

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial V}{\partial y} - \varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\partial P_i}{\partial y} = 0. \tag{23}$$

Cette équation a une racine commune avec (22); par conséquent, toutes les racines de l'équation (22) satisfont en même temps aux équations (23); par suite, toutes les racines $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des multiplicateurs.

Si l'on observe maintenant que

$$A_n = \pm \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \tag{24}$$

est une fonction rationnelle de

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, y, P_1, P_2, \ldots, P_k$$

et que $\sqrt[n]{A_n}$ substitué à φ vérifie les équations (21), on obtient

$$\varphi \sqrt[n]{A_n}. \tag{25}$$

Pour trouver le multiplicateur, on doit, par suite, rechercher si les équations

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial A}{\partial y} + n A \frac{\partial P_i}{\partial y} = 0$$

ont, pour une valeur numérique entière de n, une intégrale particulière qui soit une fonction rationnelle des grandeurs x, P et y.

10. Lorsque l'équation (3) n'a aucun multiplicateur algébrique, son intégration sous forme finie, au moyen des transcendantes définies, n'est pas possible. Nous voulons rechercher s'il n'y a pas alors un multiplicateur qui soit exprimable par cesdites transcendantes.

Donnons au multiplicateur la forme

$$e^{\lambda};$$

nous devons avoir

$$(26)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x_i} + P_i\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{\partial P_i}{\partial y} = 0.$$

Ces équations doivent être identiques par rapport à ω. Différentions par rapport à ω; alors le dernier terme disparaît et nous obtenons des équations qui coïncident, quant à leur forme, avec les équations (7), avec cette seule différence que λ remplace u. Nous pouvons donc en conclure que

$$(27)\qquad \frac{1}{\varphi}\frac{\partial\lambda}{\partial\omega} = c$$

est, soit une identité, soit une intégrale de l'équation différentielle donnée. Dans ce dernier cas, ainsi que nous l'avons déjà démontré, l'équation différentielle aurait un multiplicateur algébrique. Dans le premier cas, nous avons identiquement

$$(28)\qquad \lambda = c\int\varphi\,d\omega,$$

et nous pouvons alors, comme précédemment, opérer la réduction au moyen de l'équation qui détermine ω.

Le multiplicateur, par conséquent, doit avoir la forme

$$(29)\qquad e^{\lambda} = e^{\psi_1+\psi_2\cdots},$$

où les fonctions ψ sont des fonctions hyperalgébriques du premier échelon.

Un exemple est fourni par l'équation différentielle linéaire.

11. En vue de la simplicité nous avons supposé que les grandeurs P données sont des fonctions algébriques de y et des grandeurs x. Supposons maintenant que les grandeurs P soient des fonctions transcendantes d'échelon quelconque; nos développements n'en restent pas moins valables, si nous remplaçons partout les fonctions algébriques de x, y par des fonctions algébriques de x, y et de P.

12. Comme application simple du théorème général démontré dans ce qui précède, nous avons ce qui suit :

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_m$ des fonctions algébriques de x qui ne sont pas les dérivées de fonctions algébriques. Si l'on introduit alors les fonctions

$$\Phi_1(x) = \int^x P_1\,dx,$$
$$\Phi_2(x) = \int^x P_2\,dx, \qquad \ldots, \qquad \Phi_m(x) = \int^x P_m\,dx,$$

comme transcendantes, il est impossible d'exprimer l'intégrale

$$\int^x P\,dx,$$

où P désigne une fonction algébrique de x, sous forme finie au moyen de fonctions algébriques, de fonctions Φ et de leurs fonctions inverses, à moins que l'on n'ait

$$(30) \qquad \int P\,dx = \sum_\mu \sum_\nu c_{\mu,\nu} \Phi_\mu(x_{\mu,\nu}) + X,$$

où $x_{\mu,\nu}$ et X désignent des fonctions algébriques de x.

Un cas très particulier de ces fonctions Φ est présenté par le *logarithme*.

Il est possible d'intégrer une différentielle algébrique au moyen de fonctions algébriques et des transcendantes élémentaires ($\log x$, a^x, $\sin x$, arc $\sin x$, etc.)

sous forme finie dans le seul et unique cas où l'on a

$$\int P\,dx = \sum c_\nu \log x_\nu + X, \tag{31}$$

x_ν et X *désignant des fonctions algébriques*. On démontre aisément que *ces fonctions algébriques peuvent s'exprimer rationnellement en x et* P. En effet, elles peuvent en tout cas s'exprimer rationnellement au moyen de x, P et de la racine y_1 d'une équation algébrique *irréductible* dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de P. En différentiant (31), on obtient une équation qui est vérifiée par y_1 et, par suite, par les autres racines $y_2, \ldots, y_k$ de l'équation irréductible. On peut donc, dans l'expression de $\int P\,dx$, remplacer y_1 par chaque autre valeur de y. En additionnant les équations ainsi obtenues, on trouve une nouvelle expression pour $\int P\,dx$, où les grandeurs y entrent symétriquement. Les fonctions symétriques des grandeurs y peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de x et de P.

Si l'on introduisait les intégrales elliptiques Π et leurs fonctions inverses, il pourrait se présenter dans l'expression $\int P\,dx$ des termes de la forme

$$\sum c_k \Pi(x_k).$$

C'est à peu près sous cette forme qu'Abel a, dans une Lettre à Legendre (*Œuvres complètes*, t. II, édition Sylow et Lie, p. 275), exprimé ce théorème, avec cette restriction toutefois qu'il ne considère que les transcendantes de premier échelon et non les fonctions inverses. On ne trouve aucune démonstration du théorème dans les OEuvres d'Abel ; mais M. Sylow m'a appris qu'il existait une démonstration dans les papiers laissés par Abel ([1]).

Une partie des recherches qui précèdent a été publiée en 1876 dans un Mémoire de l'auteur intitulé : *Om Integralregningens Transcendenter* (Journal de M. Zeuthen, 3e série, t. I, p. 1 à 9).

NOTE FINALE DE L'AUTEUR (1897).

L'Université de Copenhague avait mis au concours, comme question de prix, l'extension des méthodes et théorèmes de mon Mémoire aux équations d'ordres supérieurs. Le prix fut obtenu par M. E. Schou, qui est parvenu à des résultats bien remarquables.

Comme une partie de son Travail est traduite en français et comme mon Mémoire des *Göttinger Nachrichten* est très peu connu en France, la rédaction des *Nouvelles Annales* a trouvé qu'une traduction française de ce Mémoire était désirable, et a eu la bonté de m'en offrir la publication. Naturellement, j'ai accepte avec gratitude cette offre si honorable. Je tiens aussi à adresser tous mes remercîments à M. Laugel pour la traduction dont il a bien voulu se charger.

JULIUS PETERSEN.

([1]) Les mauuscrits laissés par Abel se trouvent maintenant dans l'édition Sylow, Lie (1881). On y voit qu'Abel a démontré qu'une relation algébrique entre les intégrales $\int y\,dx$, où y est algébrique, et des logarithmes de fonctions algébriques, doit être linéaire à coefficients constants; mais il semble qu'il n'a pas réussi à démontrer la formule

$$\int y\,dx = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \ldots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + \ldots.$$

Il dit à ce sujet, dans la Lettre à Legendre (t. II, p. 278) : ..., mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais; je me suis donc contenté de quelques cas particuliers, surtout de celui où y est de la forme $\frac{r}{\sqrt{R}}$, r et R étant deux fonctions rationnelles quelconques de x.