Certificats d'études supérieures des facultés des sciences. Session de juillet 1898. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 549-571

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__549_1>

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DES FACULTÉS DES SCIENCES.

SESSION DE JUILLET 1898. — COMPOSITIONS.

Caen.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

I. *Étant donné le système différentiel orthonome*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y + u, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

trouver toutes les formes de la fraction φ *qui rendent ce système passif, et, dans ce cas, indiquer le nombre* *et la forme des éléments arbitraires dont dépend l'intégrale générale.*

En différentiant deux fois la première équation par rapport à y, une fois la seconde par rapport à x et égalant les résultats, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + (x + y + u)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} = \varphi.$$

Cette équation, qui doit être satisfaite en regardant x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial y}$ comme des variables indépendantes a pour intégrale

$$\varphi = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{F}\left(y, \frac{1 + x + y + u}{e^x}\right).$$

Quand le système est passif, son intégrale générale dépend de deux constantes arbitraires.

II. *Étant donné un système d'axes rectangulaires* OXYZ, *déterminer toutes les surfaces réglées* S, *dont les génératrices rencontrent* OZ *et telles que leurs deux systèmes de lignes de courbure se projettent sur* OXY *suivant deux systèmes de lignes orthogonales.*

Il faut que les lignes de courbure d'un système aient leurs tangentes parallèles à OXY et, par suite, soient contenues dans des plans parallèles à OXY sur chacun desquels le plan tangent S fait un angle constant avec OZ. Or, si les génératrices de S coupent OZ en des points différents, le plan tangent en ces points contient OZ et S est cylindrique : on n'échappe à cette conclusion que si toutes les génératrices coupent OZ au même point : S est un cône et l'on voit aisément qu'il est de révolution.

Épreuve pratique. — *Étant donnée l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+(x-1)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+xu=0,$$

déterminer l'intégrale telle que, si on la développe suivant la série de Maclaurin, les termes qui ne contiennent pas à la fois x et y aient pour somme $\cos x+\sin y$. On remarquera que l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+(x-1)u\right]+\frac{\partial u}{\partial y}+(x-1)u=0.$$

Intégrant, on détermine les fonctions arbitraires en faisant x ou y nuls, et l'on trouve

$$u=e^{(1-x)y}\left[\cos x-e^{-x}\left(\frac{x}{x^2-2x+2}-\frac{1}{x-1}\right)\right]$$
$$+e^{-x}\left[\frac{x\cos y+(2-x)\sin y}{x^2-2x+2}-\frac{1}{x-1}\right].$$

Mécanique.

I. *Un point M, de masse 1, glisse sans frottement sur la surface représentée, en coordonnées rectangulaires, par les équations*

$$x=u\cos v,\qquad y=u\sin v,\qquad z=F(v);$$

il est attiré vers OZ par une force $\omega^2 a$, ω et a désignant des constantes. Former les équations générales du mouvement. Déterminer la fonction F de telle sorte que, pour un cas particulier de ce mouvement on puisse avoir $u=a\omega t$; indiquer, dans ce cas, la forme de la surface et de la trajectoire.

Une des équations de Lagrange et l'intégrale des forces vives donnent

$$u''-uv'^2=-a\omega^2,\qquad u'^2+[u^2+F'^2(v)]v'^2=h-2a\omega^2u.$$

Si l'on a $u = a\omega t$, la première donne $v'^2 = \frac{\omega}{t}$ et l'on tire aisément de l'intégrale des forces vives

$$F'(v) = \frac{a\sqrt{3}}{4} v\sqrt{k^2 - v^2}, \qquad z = \frac{a}{4\sqrt{3}}\left[k^3 - (k^2 - v^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

La surface est un conoïde dont on voit la forme en cherchant sa trace sur un cylindre de révolution autour de OZ.

II. *Soit* S *un cube homogène dont chaque arête est égale à* $2a$. *On demande de former l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif à l'un des sommets* O, *en prenant pour axes coordonnés les trois arêtes qui aboutissent à ce sommet : axes principaux et moments principaux en ce point.*

Le cube, d'abord en repos, peut tourner librement autour du point O, *qui est fixe : il reçoit une percussion parallèle à* OX *en un point de coordonnées* O, a, $\frac{5}{3}a$. *Déterminer le mouvement de* S *après le choc et dans la suite des temps en supposant qu'aucune force extérieure n'agisse sur lui.*

Équation de l'ellipsoïde d'inertie

$$\frac{8}{3}Ma^2(x^2+y^2+z^2) - 2Ma^2(yz+zx+xy) = 1.$$

Prenons les moments des quantités de mouvement par rapport à OX, OY, OZ.

$$Ma^2\left(\frac{8}{3}p_0 - q_0 - r_0\right) = 0,$$

$$Ma^2\left(\frac{8}{3}q_0 - r_0 - p_0\right) = \frac{5}{3}aP,$$

$$Ma^2\left(\frac{8}{3}r_0 - p_0 - q_0\right) = -aP.$$

$$p_0 = \frac{3}{11}\frac{P}{Ma}, \qquad q_0 = \frac{8}{11}\frac{P}{Ma}, \qquad r_0 = 0,$$

S prend ensuite un mouvement de Poinsot correspondant au cas où deux des moments principaux sont égaux.

Épreuve pratique. — *Sur une circonférence de* 2^m *de rayon, située dans un plan vertical, se meut un point pesant* M *de telle sorte que le carré de sa vitesse au point le plus bas soit double du carré de la vitesse au point le plus haut. Calculer, à* $0^s,01$ *près, le temps que met* M *à parcourir la circonférence. On néglige les résistances passives et l'on prend* g *égal à* $9^m,809$.

$$T = \frac{1}{\sqrt{3g}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\cos\theta}{3}}} = 1^s,18.$$

Toulouse.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Étant donnée une courbe* C, *on demande de déterminer ses développées, c'est-à-dire les courbes dont les tangentes sont normales à la courbe* C; *cas où cette dernière est plane.*

II. *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{(1+x^2)^3}\, dx.$$

III. *Démontrer que l'hyperbole* H, *définie en coordonnées cartésiennes par les équations*

$$x + y = 0, \qquad yz = 2,$$

est une courbe caractéristique de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$z + px + qy - 1 - pq x^2 y^2 = 0,$$

où p et q désignent, suivant l'usage, les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, par rapport aux variables indépendantes x et y, de la fonction z. Établir que les surfaces intégrales de cette équation qui passent par H sont inscrites le long de cette hyperbole dans un même cylindre dont on demande l'équation.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation*

$$x^3 + y^3 = axy.$$

Cette courbe présente une boucle et une branche infinie.

Calculer l'aire de la boucle.

Calculer l'aire comprise entre la branche infinie et son asymptote.

Considérant la boucle comme la section droite d'un cylindre, calculer le volume de la portion de cylindre comprise entre le plan des xy et le paraboloïde qui a pour équation

$$az = xy$$

en coordonnées rectangulaires.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *En supposant connues les équations générales du mouvement des systèmes sous la forme que leur a données Lagrange, savoir*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_m}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_m} = Q_m,$$

on demande d'indiquer sommairement la marche à suivre pour arriver à la forme hamiltonienne ou canonique, dans le cas où cette forme peut être obtenue.

Montrer que la solution de tout problème de Dynamique dépend, dans ce cas, de la connaissance d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

II. *Montrer qu'une parabole du second degré est une courbe brachistochrone pour une force constante, répulsive, émanant du foyer.*

Épreuve pratique. — *Calculer le moment d'inertie d'un cylindre homogène circulaire droit, relativement à une droite perpendiculaire à l'axe. On donne le rayon de base du cylindre* R, *la hauteur* H, *la densité* ρ.

La droite est située à une distance a de l'axe et à une distance b de l'une des bases.

Mécanique appliquée.

Épreuve écrite. — I. *Méthodes générales de transmission des rotations uniformes entre deux axes quelconques par le contact de deux surfaces.*

Construction générale des engrenages à roulement. Engrenages de White.

II. *Un plan mobile* Q *glisse sur un plan fixe* P *de façon que deux droites du plan* Q *restent constamment tangentes à deux cercles du plan* P.

1° *Trouver les deux roulettes;*

2° *Montrer que toute droite du plan* Q *enveloppe un cercle du plan* P;

3° *Montrer que le mouvement du plan* Q *peut, d'une infinité de façons, s'obtenir en faisant mouvoir un angle droit de manière que chacun de ses côtés passe par un point fixe.*

ASTRONOMIE OU MÉCANIQUE CÉLESTE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Exposer les principes de la méthode de la variation des constantes arbitraires pour l'étude du mouvement de translation des planètes.*

II. *Précession des équinoxes (on fera abstraction de la nutation). Valeurs de la précession annuelle en ascension droite et en déclinaison. Détermination des coordonnées moyennes d'une étoile à une date t, en supposant connues les coordonnées moyennes de la même étoile à une autre date t_0.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *L'anomalie vraie d'une planète à un certain instant est*

$$315^\circ 1' 23'', 02,$$

le logarithme du rayon vecteur mené du Soleil à la planète

$$0,3259877,$$

l'inclinaison de l'orbite

$$13^\circ 6' 44'', 10,$$

la distance du périhélie au nœud

$$241^\circ 10' 20'', 57,$$

la longitude du nœud

$$171^\circ 7' 48'', 73.$$

On demande la longitude et la latitude de la planète par rapport à l'écliptique et la projection du rayon vecteur sur l'écliptique.

Montpellier.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — *Une courbe est représentée, par rapport à trois axes rectangulaires, par les équations*

$$x = \beta \cos \alpha t - \alpha \cos \beta t,$$
$$y = \beta \sin \alpha t + \alpha \sin \beta t,$$
$$z = \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} t.$$

1° *Démontrer que c'est une hélice;*

2° *Former et simplifier l'équation du plan normal. Déterminer le centre et le rayon de la sphère osculatrice. Démontrer que ce centre décrit également une hélice;*

3° *Calculer les rayons de courbure et de torsion. Déterminer le centre de la circonférence osculatrice.*

Épreuve pratique. — *Calculer l'aire comprise à l'intérieur de la courbe fermée*

$$(x^2 + y^2)^2 = a x^2 + b y^2;$$

examiner les divers cas qui se présentent lorsque a *et* b *prennent des valeurs quelconques positives ou négatives.*

Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Deux points matériels pesants, de masses* m *et* m'*, sont reliés par un fil élastique de masse négligeable. Lorsque le fil n'est pas tendu, sa longueur est* a ; *s'il est tendu de manière à prendre la longueur* $l\,(l > a)$, *on admet que sa tension est égale à* $\lambda^2(l - a)$, λ^2 *étant une constante. On place le fil verticalement et on le tend de manière à lui donner* *la longueur* $2a$; *puis, l'un des points étant maintenu fixe, on imprime à l'autre une vitesse horizontale égale à* $\omega\lambda\sqrt{\frac{m+m'}{mm'}}$, ω *étant une constante, et l'on abandonne le système aux forces qui le sollicitent. On demande d'étudier le mouvement que prend le système.*

Nota. — S'il arrive, dans le cours du mouvement, que le fil reprenne sa longueur naturelle a, il sera inutile de poursuivre l'étude du mouvement.

Épreuve pratique.—Ox, Oy, Oz *sont des axes rectangulaires. Un conoïde est engendré par une droite qui reste parallele au plan des* xy, *rencontre l'axe des* z *et s'appuie sur le cercle*

$$x = a, \qquad y^2 + z^2 = a^2.$$

Déterminer le centre de gravité du volume homogène limité par la surface du conoïde et les deux plans $x = a$, $x = 2a$.

Nota. — On démontrera les formules fondamentales qui serviront au calcul numérique.

Certificat d'Algèbre supérieure.

Épreuve écrite. — *On adjoint à un corps de nombres donné* Ω *une ou plusieurs quantités algébriques* α, β, γ, ... *racines d'équations dont les coefficients appartiennent à* Ω. *Établir les principales propriétés du nouveau corps* $\Omega(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ *ainsi obtenu. Corps conjugués, corps normaux. Éléments primitifs. Corps primitifs ou imprimitifs.*

Épreuve pratique. — *Appliquer la théorie de Galois à l'équation du quatrième degré.*

ASTRONOMIE.

ÉPREUVE ÉCRITE. — 1° *Quelles sont les corrections fondamentales à faire subir aux observations astronomiques, étoiles, astres mobiles, pour comparer celles-ci aux éphémérides?*

2° *Indiquer sommairement l'effet de chacune des causes considérées;*

3° *Étudier spécialement l'une d'elles et donner les formules qui s'y rapportent.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Connaissant les coordonnées équatoriales des étoiles*

$$\alpha\ \text{Lion}\ \mathcal{R} = 10^h\ 2^m 21^s,0, \qquad \mathcal{D} = +12^\circ 31'\ 9'',0;$$
$$\alpha\ \text{Bouvier}\ \mathcal{R} = 14^h\ 10^m 30^s,0, \qquad \mathcal{D} = +19^\circ 46' 16'',0,$$

trouver le temps sidéral α *et la distance zénithale* z, *au passage au méridien de Montpellier du milieu,* M, *de la distance angulaire* 2δ *des deux étoiles*

Latitude de Montpellier $\lambda = 46^\circ 13' 16''$.

Lyon.

ANALYSE.

1. *On considère les courbes* C *qui satisfont à la relation différentielle*

$$x\,dy - y\,dx = a\,ds, \qquad a = \text{paramètre const.}$$

1° *Démontrer que les normales principales de* C *rencontrent l'axe des* z;

2° *Former l'équation* E *aux dérivées partielles des surfaces qui admettent les courbes* C *pour lignes de plus grande pente, par rapport au plan des* xy;

3° *Intégrer* E;

4° *Étudier les caractéristiques de* E.

II. *Soit l'intégrale*

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 1}}.$$

1° *Trouver les points critiques;*

2° *Établir les formules fournissant les diverses valeurs de l'intégrale;*

3° *Exprimer y en x au moyen de la fonction elliptique* $\wp$ *de Weierstrass convenablement choisie.*

SOLUTIONS.

I. 1° Si l'on prend l'arc s pour variable indépendante, les trois dérivées secondes x'', y'', z'' sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale principale. Or, différentions la relation

$$x\,dy - y\,dx = a\,ds \qquad \text{ou} \qquad xy' - yx' = a;$$

il viendra

$$xy'' - yx'' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° Sur une surface, l'équation différentielle des lignes de plus grande pente est

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Il vient ainsi pour E

$$xq - yp = a\sqrt{(p^2+q^2)(1+p^2+q^2)},$$

car

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2;$$

3° Dans l'équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

les relations différentielles qui fournissent les caractéristiques sont

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{P} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ},$$

$$P = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad X = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \dots.$$

Ici

$$Z = 0, \qquad X = q, \qquad Y = -p,$$

d'où

$$p\,dp + q\,dq = 0.$$

Des deux relations

$$\left.\begin{cases} qx - py = a\lambda\sqrt{1+\lambda^2} \\ p^2 + q^2 = \lambda^2 \end{cases}\right\} \lambda = \text{const.},$$

on tire

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{-ay\sqrt{1+\lambda^2} + x\sqrt{x^2+y^2-a^2(1+\lambda^2)}}{x^2+y^2},$$

$$\frac{q}{\lambda} = \frac{ax\sqrt{1+\lambda^2} + y\sqrt{x^2+y^2-a^2(1+\lambda^2)}}{x^2+y^2},$$

$$\frac{dz}{\lambda} = \frac{p\,dx + q\,dy}{\lambda}$$

$$= \frac{(x\,dy - y\,dx)a\sqrt{1+\lambda^2} + (x\,dx + y\,dy)\sqrt{x^2+y^2-a^2(1+\lambda^2)}}{x^2+y^2}.$$

Prenons les coordonnées semi-polaires z

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = \operatorname{arctang}\frac{y}{x}.$$

On aura

$$\frac{z+b}{\lambda} = a\theta\sqrt{1+\lambda^2} + 2\int\frac{dr}{r}\sqrt{r^2 - a^2(1+\lambda^2)}.$$

Une quadrature élémentaire fournit une intégrale complète aux deux paramètres λ et b.

4° Le long d'une caractéristique $p^2 + q^2 =$ const., la normale à la surface fait un angle constant avec l'axe des z, etc.

La discussion géométrique complète est intéressante. Je la signale au lecteur.

On verra notamment que sur les surfaces cherchées la plus courte distance de la normale et de l'axe des z est inversement proportionnelle au cosinus de l'angle formé par la normale et l'axe des z.

II. On peut écrire

$$\frac{1}{2}x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 4}}.$$

On a l'intégrale classique de Weierstrass aux deux modules $g_2 = 0$, $g_3 = 4$. On retombe sur une question de cours.

Rennes.

Analyse.

Épreuve théorique. — 1° *x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque* M *d'une courbe* C, *trouver les expressions des coordonnées* X, Y, Z *du point correspondant de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante de cette courbe. Quelle doit être, en fonction de l'arc* S, *l'expression du rapport* $\frac{R}{T}$ *du rayon de courbure au rayon de torsion de la courbe* C *pour que sa surface rectifiante soit un cylindre ou bien un cône.*

On montrera que, dans le premier cas, la courbe C *est une hélice et que, dans le second, toutes les tangentes sont également éloignées d'un point fixe.*

2° *Établir la série de Lagrange pour le développement selon les puissances de α d'une fonction donnée de l'une des racines de l'équation*

$$u = x + \alpha\varphi(u).$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} - 8y = x^2(1+3\,\mathrm{L}x).$$

Astronomie.

Épreuve théorique. — *Exposer la théorie des systèmes optiques; expliquer le progrès de la précision des* visées *réalisé par l'emploi des* lunettes.

Discussion du bénéfice d'une lunette astronomique au point de vue de la clarté, sous divers grossissements.

Épreuve pratique. — *Connaissant les éléments du mouvement elliptique d'une comète périodique et son anomalie excentrique, calculer le rayon vecteur, la longitude et le temps écoulé depuis le dernier passage au périhélie.*

Dijon.

Calcul différentiel et intégral.

Épreuve écrite. — I. *Définir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{du}{dx} = f\left(x, y, u, \frac{du}{dy}\right),$$

et expliquer comment sa connaissance peut conduire à celle de toutes les intégrales de la même équation.

II. *Trouver la fonction d'une seule variable, $f(x)$, non identiquement nulle, qui jouit de la propriété exprimée par l'identité*

$$f(yz) = zf(y) + yf(z).$$

Prouver a priori *qu'elle ne peut être olotrope en* $x = 0$.

MÉCANIQUE.

I. *Démontrer les équations de Lagrange.*

II. *Un tube rectiligne infiniment mince de longueur* L *peut tourner autour d'un axe vertical passant par une de ses extrémités et auquel il est perpendiculaire. La masse est* M. *Une bille pesante, de masse* m, *est placée dans le tube à une distance* a *de l'axe. On donne au système une vitesse de rotation* x *autour de l'axe et l'on demande le mouvement qui se produira.*

Déterminer, en particulier, au bout de combien de temps la bille quittera le tube.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un système d'axes* Ox, Oy *est venu occuper une nouvelle position* $O'x'$, $O'y'$. *Les coordonnées de* O' *par rapport à* Ox, Oy *sont* $a = 3$, $b = 2$; *l'angle de* $O'x'$ *avec* Ox *est de* $120°$. *On sait que l'on peut amener les axes* Ox, Oy *à coïncider respectivement avec* $O'x'$, $O'y'$ *par une rotation autour d'un certain point du plan. On demande de calculer les coordonnées de ce point par rapport aux axes* Ox, Oy *et* $O'x'$, $O'y'$.

ASTRONOMIE.

Étude du mouvement des planètes autour du Soleil.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *En un lieu dont la latitude est* $39°5'54''$, *on a observé dans le premier vertical une étoile dont la déclinaison est* $39°5'20''$. *On demande de calculer son angle horaire et sa distance énithale.*

Poitiers.

Astronomie.

Composition. — *Taches du Soleil. — Rotation du Soleil. — Révolution apparente.*

Épreuve pratique. — *Les coordonnées géocentriques de la planète Mars sont : longitude* $123°53'55'',2$; *latitude* $+1°47'17'',58$; *la longitude du Soleil au même instant a pour valeur* $228°46'28'',4$. *Sachant que la longitude du nœud ascendant de la planète est* $48°46'28'',4$, *calculer l'inclinaison de l'orbite.*

Mécanique rationnelle.

Composition. — *Étudier le mouvement d'un point matériel, non pesant, assujetti à demeurer sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe de révolution; il est sollicité, perpendiculairement au cercle de gorge, par une attraction inversement proportionnelle au cube de sa distance au plan* $\frac{\mu m}{z^3}$, *et il part d'une hauteur* h *avec une vitesse tangente au parallèle et égale à* $\frac{\sqrt{\mu}}{h}$.

Limites du déplacement dans le sens des z. — *Temps d'une période. — Réaction de la surface.*

Épreuve pratique. — *Calculer le moment d'inertie d'un anneau engendré par un hexagone régulier tournant autour d'un axe perpendiculaire à un diamètre joignant deux sommets opposés. On donne la distance* a *du centre* C *à l'axe et le côté* R *de l'hexagone. On calculera simplement le moment d'inertie relatif à* *l'axe de révolution*

$$a = 1^{m}.50, \qquad R = 0^{m},50;$$

la densité est supposée égale à 1.

ANALYSE.

COMPOSITION. — *Trouver les courbes planes rapportées à des axes rectangulaires et telles que la distance de l'origine à la tangente (en un point quelconque) étant multipliée par la somme des normales terminées aux axes, on obtienne un produit constant* a^2.

Trouver les surfaces rapportées à trois plans rectangulaires et telles que la distance de l'origine au plan tangent étant multipliée par la somme des trois normales terminées aux plans coordonnés, on obtienne un produit constant a^2.

Chercher s'il existe une ou plusieurs surfaces telles que, pour $x = 0$, $z = \sqrt{b^2 - y^2}$. *Examiner le cas où* $b^2 = \frac{a^2}{2}$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer le système*

$$3\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{d^2y}{dt^2} - 6x - 7y = 7 + 2t,$$

$$4\frac{d^2x}{dt^2} + 7\frac{d^2y}{dt^2} - 8x - 10y = 10 + 4t.$$

Nancy.

CERTIFICAT D'ANALYSE SUPÉRIEURE

ÉPREUVE ÉCRITE. — *On donne l'équation*

$$y^3 - 3y + 2\varphi(x) = 0,$$

$\varphi(x)$ *désignant un polynome entier sans racine multiple :*

1° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de la fonction algébrique y? Trouver la forme des développements qui représentent ses branches envisagées dans le domaine de chacun de ces points ;*

2° *Former l'équation différentielle linéaire et homogène* (E) *d'ordre minimum à laquelle ces branches satisfont ;*

3° *Quels sont, à distance finie, les points singuliers de l'équation* (E)? *Écrire l'équation déterminante relative à chacun d'eux; vérifier que, parmi ces points, ceux α qui sont points ordinaires pour la fonction algébrique y sont toujours à apparence singulière pour l'équation* (E) ;

4° *Quelle est la forme analytique des intégrales fondamentales dans le domaine d'un point singulier distinct des points α? Retrouver, en partant de cette forme, les développements des racines demandés dans la première partie ;*

5° *Soit l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y\,dx}{(x-\alpha)^2\sqrt{\varphi(x)}},$$

où α désigne un des points à apparence singulière précédemment considérés, y étant une branche de la fonction algébrique définie par l'équation primitive ; dire de quelle nature est le point α relativement à cette intégrale.

SOLUTION.

Les points singuliers de y sont les racines de

$$\varphi(x)^2 - 1 = 0;$$

si x_0 est, par exemple, une racine de

$$\varphi(x) - 1 = 0,$$

l'équation donnée a, pour $x = x_0$, une racine simple égale à -2 et une racine double égale à 1; les développements en série des branches dans le domaine de x_0 sont de la forme

$$y = -2 - \frac{2}{9}\varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{8\varphi'(x_0)^2 - 27\varphi''(x_0)}{243}(x - x_0)^2 + \ldots$$

$$\begin{aligned} y = 1 + \sqrt{-\frac{2}{3}\varphi'(x_0)}(x - x_0)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{9}\varphi'(x_0)(x - x_0) \\ + \frac{5\varphi'(x_0)^2 - 27\varphi''(x_0)}{162\sqrt{-\frac{2}{3}\varphi'(x_0)}}(x - x_0)^{\frac{3}{2}} + \ldots \end{aligned}$$

L'équation différentielle (E) est

$$9\varphi'(\varphi^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} + 9[\varphi\varphi'^2 - (\varphi^2 - 1)\varphi'']\frac{dy}{dx} - \varphi'^3 y = 0:$$

elle a comme points singuliers : 1° les zéros α de φ' qui sont à apparence singulière, avec 0 et 2 comme racines de l'équation déterminante, si α est zéro simple, ou bien 0 et $p+1$ si α est zéro d'ordre p; 2° les zéros de $\varphi^2 - 1$ qui sont des points singuliers algébriques, avec 0 et $\frac{1}{2}$ comme racines de l'équation déterminante, dans le domaine d'un zéro simple, ou bien 0 et $\frac{p}{2}$ dans le domaine d'un zéro d'ordre p.

Dans le domaine d'un point α, y est développable en série de la forme

$$y = A_0 + A_p(x - \alpha)^p + \ldots,$$

où p est entier égal ou supérieur à 2; on en conclut que α est un pôle simple pour l'intégrale de l'énoncé.

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

I. *Étant donnés trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz *et la sphère fixe* S *définie par l'équation*

$$x^2+y^2+z^2-1=0.$$

1° *Le lieu du centre d'une sphère variable* Σ *assujettie à couper orthogonalement la sphère* S *et à passer par un point donné* p *est un plan* P ;

2° *Le lieu du point* p *pour lequel le plan* P *correspondant est tangent à la quadrique* Q *définie par l'équation*

$$Ax^2+By^2+Cz^2-1=0$$

est une surface du quatrième ordre Γ ;

3° *La normale en un point* p *de la surface* Γ *va passer par le point où le plan* P *qui lui correspond touche la quadrique* Q ;

4° *Si l'on suppose que* Q *est une quadrique variable assujettie à passer par l'intersection de la sphère* S *et de la quadrique fixe*

$$ax^2+by^2+cz^2-1=0,$$

il y a trois positions de la surface Γ *qui passent par un point donné* p_0 *de l'espace. Démontrer que ces trois surfaces* Γ *se coupent deux à deux à angle droit au point* p_0 ;

5° *Déduire géométriquement de là les lignes de courbure des surfaces* Γ.

II. *Une surface hélicoïde est définie par les équations*

$$x=\cos u\cos v,$$
$$y=\cos u\sin v,$$
$$z=\sin u+v.$$

Calculer la différentielle d'un arc de courbe tracée sur cette surface; déterminer les trajectoires orthogonales des hélices $u =$ const. et déterminer de nouvelles coordonnées u_1 et v_1 fonctions de u et v de façon que les courbes $u_1 =$ const. et $v_1 =$ const. soient composées des hélices et des trajectoires précédentes, et constituent un réseau isotherme sur la surface.

SOLUTION.

I. Si x, y, z sont les coordonnées du point p, l'équation du plan P est

$$2xX + 2yY + 2zZ - (x^2 + y^2 + z^2 + 1) = 0,$$

et celle de la surface Γ est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}\right) = 0;$$

c'est une cyclide; on vérifie immédiatement la propriété de la normale en un point p.

Lorsque la quadrique Q fait partie du faisceau

$$(a + \lambda)x^2 + (b + \lambda)y^2 + (c + \lambda)z^2 - (1 + \lambda) = 0,$$

la cyclide a pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2 - 4(1 + \lambda)\left(\frac{x^2}{a + \lambda} + \frac{y^2}{b + \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda}\right) = 0;$$

par un point de l'espace en passent trois, deux à deux orthogonales, et leurs intersections respectives sont lignes de courbure pour chacune d'elles.

II. On a

$$ds^2 = du^2 + 2\cos u\, du\, dv + (1 + \cos^2 u)dv^2:$$

en écrivant

$$ds^2 = (1 + \cos^2 u)\left(dv + \frac{\cos u}{1 + \cos^2 u}du\right)^2 + \frac{du^2}{1 + \cos^2 u},$$

et

$$dv_1 = dv + \frac{\cos u}{1 + \cos^2 u} du,$$

d'où

$$v_1 = v + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + \sin u}{\sqrt{2} - \sin u},$$

les courbes $v_1 =$ const. sont les trajectoires orthogonales des hélices; il suffit ensuite d'écrire

$$ds^2 = (1 + \cos^2 u) \left[dv_1^2 + \frac{du^2}{(1 + \cos^2 u)^2} \right],$$

et

$$du_1 = \frac{du}{1 + \cos^2 u},$$

d'où

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tang} \frac{\operatorname{tang} u}{\sqrt{2}};$$

pour obtenir

$$ds^2 = \frac{2 + 2 \operatorname{tang}^2 u_1 \sqrt{2}}{1 + 2 \operatorname{tang}^2 u_1 \sqrt{2}} (du_1^2 + dv_1^2);$$

de sorte que les courbes $u_1 =$ const. et $v_1 =$ const. constituent un réseau isotherme sur la surface.

Certificat de Mécanique rationnelle.

Épreuve écrite. — *Étudier le mouvement permanent d'un fluide incompressible homogène se mouvant à l'infini parallèlement à une direction donnée, avec une vitesse de translation constante donnée lorsqu'on suppose qu'une sphère rigide homogène fixe donnée est plongée dans le fluide.*