FERBER

L'intégration par l'itération et le calcul des fonctions itératives

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 509-512
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__509_1>

[H11]

L'INTÉGRATION PAR L'ITÉRATION ET LE CALCUL DES FONCTIONS ITÉRATIVES;

PAR M. FERBER.

Plusieurs géomètres s'occupent de l'itération, c'est-à-dire de l'opération $f\{f[f\ldots f(x)]\}=f^n(x)$, où la fonction f est répétée n fois. MM. Kœnigs, Bourlet et Lémeray ont notamment démontré plusieurs propriétés de cette opération.

La plus importante est que les racines de $f(x)-x$ sont données par $f^n(x_0)$ lorsque n croît indéfiniment (1).

La remarque suivante, non moins importante, montre que l'itération résout aussi l'intégration aux différences quelconques.

En effet, si nous faisons

$$f(x) = x + \tau\varphi x,$$

on aura successivement

$$x_1 = x_0 + \tau\varphi x_0, \qquad x_2 = x_1 + \tau\varphi x_1, \qquad \ldots,$$
$$x_n = x_{n-1} + \tau\varphi x_{n-1},$$

et l'on voit ainsi que x_n est d'un côté $f^n(x_0)$, et de l'autre la solution de l'équation $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi x$, où chaque accroissement de la variable t est supposé égal à τ.

Pour passer à l'intégration aux différences infiniment petites, il suffit de faire tendre τ vers 0 et n vers ∞ en conservant à $n\tau$ la valeur constante t (2).

En généralisant la définition de l'itération par la supposition que les fonctions successives ne sont pas né-

---

(1) Avec un choix judicieux de x_0.

(2) C'est le procédé constamment employé par les précurseurs des inventeurs du Calcul intégral et qui a soulevé au commencement du XVIIIe siècle des discussions passionnées, principalement théologiques. Elles ne se sont d'ailleurs calmées qu'après que Lagrange eut par la dérivée supprimé les infinis dans le courant du calcul. Comme conclusion, si l'on n'avait pas cédé à ces controverses, l'Analyse s'occuperait aujourd'hui non pas du calcul des fonctions par l'étude des dérivées, mais du calcul des fonctions par l'étude de l'itération.

cessairement les mêmes et qu'elles peuvent avoir plusieurs variables, on intégrerait de même des fonctions plus compliquées telles que

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi(x, t), \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi(x, y), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \varphi(x, y),$$
$$\frac{\Delta^2 x}{\Delta t^2} = \varphi(x), \qquad \ldots.$$

L'itération résolvant les deux problèmes fondamentaux de l'Algèbre supérieure, on comprend l'intérêt qu'il y aurait à avoir une formule générale donnant $f^n(x_0)$.

M. Bourlet, dans les *C. R.*, p. 583; 1898, a donné une formule simple qui montre bien la manière dont n entre dans le résultat, mais qui, tirée d'une identité, ne permet pas le calcul numérique.

Voici un artifice très puissant grâce auquel on peut trouver une formule lorsque f se laisse développer suivant les puissances croissantes de la variable.

Soit le quotient $\frac{f(a_p)}{1 - a'_p x}$, où à la constante a en correspond une autre de même indice accentuée. On convient de faire dans le quotient effectué $aa' = 1$ aussi souvent que possible, puis $a = 0$, $a' = 0$. Il est clair que le résultat sera $f(x)$; mais cette nouvelle façon d'écrire dégage x de f et permet d'opérer sur cette variable. C'est ainsi qu'on aura évidemment

$$f(fx) = \frac{fa_1}{1 - a'_1 fx_0}, \qquad fffx = \frac{fa_1}{1 - a'_1 fa_2} \frac{1}{1 - a'_2 fx_0},$$

et généralement

$$f^n x_0 = \frac{fa_1}{1 - a'_1 fa_2} \frac{1}{1 - a'_2 fa_3} \cdots \frac{1}{1 - a'_{n-1} fx_0},$$

et, pour le cas de deux variables,

$$x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \qquad y_n = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

$$x_n = \frac{f(a_1, b_1)}{(1 - a'_1 fa_2, b_2)(1 - b'_1 \varphi a_2, b_2)}$$
$$\times \frac{1}{(1 - a'_2 fa_3, b_3)(1 - b_2 \varphi a_3, b_3)} \cdots$$
$$\times \frac{1}{(1 - a'_{n-1})(fx, y)(1 - b'_{n-1} \varphi x, y)}.$$

Pour mettre ces formules sous forme entière, on emploiera les fonctions aleph de Wronski et l'on arrivera ainsi à la formule parue dans le tome IV de l'*Intermédiaire*, p. 175.

Il ne faut pas s'effrayer de la multiplicité des termes qui vont s'introduire ainsi; d'ailleurs plusieurs de ces termes deviennent nuls par convention ou par la nature des fonctions. Enfin, s'il reste un grand nombre de termes, c'est que la question les comporte et toute autre méthode les introduirait qui n'aurait ni l'avantage de la généralité, ni celui de la symétrie.