NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

X. ANTOMARI

Sur un cas particulier de la transformation homographique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 489-499

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__489_0>

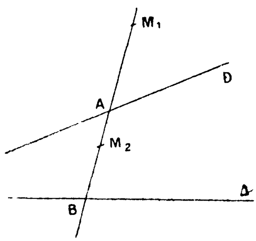
[P1c]

SUR UN CAS PARTICULIER DE LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE;

Par M. X. ANTOMARI.

Définition de la transformation. — Considérons deux droites fixes, D et Δ. Un point M_1 étant donné dans l'espace, on peut mener une droite et une seule passant par ce point et s'appuyant sur les droites D et Δ.

Fig. 1.



Imaginons qu'on ait mené cette droite et qu'au point M_1 on fasse correspondre le point M_2, conjugué harmonique du point M_1 par rapport aux points de rencontre A et B avec D et Δ. On a ainsi une correspondance point par point. Cette correspondance est une correspondance homographique. En effet :

1° A tout point de l'une des figures il correspond un point et un seul de l'autre. On peut même dire qu'on a une correspondance involutive; car à tout point M_1 considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux figures, il correspond toujours le même point M_2, puisqu'il existe une seule droite passant par M_1 et rencontrant D et Δ, et que, sur cette droite, il n'existe qu'un point M_2 conjugué harmonique de M_1 par rapport aux deux points A et B;

2° Si le point M_1 décrit une droite D_1, M_1M_2 engendre un hyperboloïde à une nappe dégénéré ou non dégénéré et, sur cet hyperboloïde, le point M_2 décrit une droite D_2 de même système que D, Δ et D_1; donc à une droite il correspond une droite;

3° A deux droites qui se coupent, il correspond évidemment deux droites qui se coupent; il en résulte qu'à un plan il correspond un plan. Par conséquent la correspondance est bien une correspondance homographique.

Propriétés. — Les droites D et Δ, directrices de la transformation, se correspondent évidemment à elles-mêmes; car si M_1 coïncide avec A, par exemple, M_2 coïncide aussi avec A.

Toute droite qui s'appuie sur D et sur Δ coïncide avec sa transformée; il en est, par suite, de même de toute surface réglée qui admet D et Δ comme directrices. En particulier, tout plan passant par D ou Δ coïncide avec le plan correspondant.

Considérons alors une ligne plane située dans un plan passant par D, par exemple, et rencontrant D en un point O. La ligne correspondante sera située dans le même plan et sera homologique à la première, D étant l'axe d'homologique et O le centre d'homologie.

Supposons que le point M_1 décrive une surface S_1 d'ordre m, le point M_2 décrit une surface de même ordre S_2, qui rencontre D et Δ aux mêmes points que S_1. De plus, les sections faites dans ces deux surfaces, par un même plan passant par D ou Δ, seront des sections homologiques.

Lorsque le point M_1 s'éloigne à l'infini, dans une direction quelconque, le point M_2 devient le milieu de AB parallèle à cette direction et s'appuyant sur D et Δ. Il en résulte que, au plan de l'infini, il correspond le plan équidistant des deux droites. Par conséquent si une courbe quelconque a p points à l'infini, la transformée rencontrera en p points le plan équidistant des deux droites, et réciproquement.

Nous avons vu que, à toute figure plane située dans un plan passant par D ou Δ, il correspond une figure située dans le même plan et homologique à la première. Si le plan de la courbe est mené par D, par exemple, parallèlement à Δ, la droite D est un diamètre des deux figures par rapport à la direction Δ; de sorte que si D et Δ sont rectangulaires, les deux figures sont symétriques par rapport à D. On a une propriété analogue concernant les figures situées dans le plan mené par Δ parallèlement à D.

Soit ω le milieu de la perpendiculaire commune à D et à Δ. Comme au point ω il correspond le point à l'infini sur la perpendiculaire commune, à toute droite menée par ω il correspondra une droite perpendiculaire au plan P équidistant des deux droites D et Δ.

Formules de transformation. — Prenons pour origine le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites; prenons, en outre, cette perpendiculaire commune pour axe des z, et les bissectrices des projections des deux droites sur le plan équidistant pour axes des x et des y. Les équations des deux droites D et Δ sont respectivement

$$y - mx = 0 \quad \text{et} \quad y + mx = 0,$$
$$z - h = 0 \quad \text{et} \quad z + h = 0.$$

Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point M_1, x_2, y_2, z_2 celles du point M_2, et λ le rapport $\frac{M_1A}{AM_2}$, les coordonnées du point A sont

$$\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad \frac{z_1+\lambda z_2}{1-\lambda}.$$

Comme le point A est situé sur D, on a

$$(1) \qquad y_1+\lambda y_2 - m(x_1+\lambda x_2) = 0,$$
$$(2) \qquad z_1-\lambda z_2 - h(1+\lambda) = 0.$$

D'autre part, si les quatre points M_1, M_2, A, B forment une division harmonique, les coordonnées du point M_2 sont

$$\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}, \quad \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}, \quad \frac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda};$$

de sorte que si l'on exprime que ce point est sur Δ, il vient

$$(3) \qquad y_1-\lambda y_2 + m(x_1-\lambda x_2) = 0.$$
$$(4) \qquad z_1-\lambda z_2 + h(1-\lambda) = 0.$$

En éliminant λ entre les équations (1), (2), (3), (4), on obtient facilement

$$(5) \qquad x_1 = \frac{h y_2}{m z_2}, \qquad y_1 = \frac{h m x_2}{z_2}, \qquad z_1 = \frac{h^2}{z_2}.$$

Ces formules, qui sont réciproques en x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2, définissent la transformation, qui est évidemment une transformation homographique. Elles mettent bien en évidence les propriétés de la transformation, que nous avons étudiées directement.

Nous allons les utiliser pour obtenir d'autres résultats.

Considérons d'abord deux positions du point M_2 symétriques par rapport à l'origine. Si dans les formules (5) on change x_2, y_2, z_2 respectivement en $-x_2$, $-y_2$, $-z_2$, les valeurs de x_1 et de y_1 ne changent pas, et la valeur de z_1 change de signe; donc les deux positions de M_1 qui correspondent aux positions considérées de M_2 sont symétriques par rapport au plan des xy.

Il en résulte que si l'un des points décrit une figure admettant l'origine comme centre de symétrie, la figure correspondante admettra le plan des xy comme plan de symétrie, et réciproquement.

Autrement, si l'on considère deux figures symétriques par rapport à l'origine, les deux figures correspondantes seront symétriques par rapport au plan des xy, et réciproquement.

En particulier, à une droite ou à un plan passant par l'origine, il correspond une droite ou un plan perpendiculaires au plan des xy.

Considérons, d'après cela, un hyperboloïde à deux nappes, dont l'équation par rapport aux axes choisis est

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

L'équation de la surface transformée est

$$\frac{h^2 y^2}{m^2 a^2 z^2} + \frac{h^2 m^2 x^2}{b^2 z^2} - \frac{h^4}{c^2 z^2} + 1 = 0,$$

et l'on peut l'écrire

$$\frac{h^2 m^2 x^2}{b^2} + \frac{h^2 y^2}{a^2 m^2} - z^2 - \frac{h^4}{c^2} = 0.$$

Voyons si cette équation peut représenter une sphère. Pour qu'il en soit ainsi il faut évidemment et il suffit que l'on ait

$$\frac{h^2 m^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2 m^2} = 1.$$

De ces deux équations, on tire d'abord

$$m^2 = \pm \frac{b}{a}$$

et ensuite

$$h^2 = \pm ab.$$

Si l'on veut que m et h soient réels, il faut prendre

$$m^2 = \frac{b}{a},$$

$$h^2 = ab.$$

Donc, étant donné un hyperboloïde à deux nappes, il existe toujours deux droites réelles et deux seulement perpendiculaires à l'axe transverse, et telles que si on les prend comme directrices de la transformation définie plus haut, l'hyperboloïde se transforme en une sphère concentrique.

Le carré du rayon de la sphère est, d'ailleurs,

$$R^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}, \qquad \text{d'où} \qquad R = \frac{ab}{c},$$

c'est-à-dire la quatrième proportionnelle entre a, b, c.

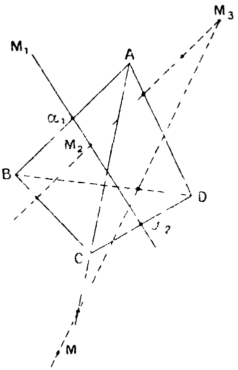
Généralisation de la transformation. — Une généralisation évidente de la transformation consiste à faire correspondre les points M_1 et M_2, de telle sorte que le rapport anharmonique

$$\frac{M_1A}{AM_2} : \frac{M_1B}{BM_2}$$

ait une valeur donnée K.

Transformation générale. — Il est aisé de voir que la transformation homographique la plus générale se ramène à trois transformations de cette espèce. Suppoposons, en effet, que l'on prenne le tétraèdre des points doubles comme tétraèdre de référence, et soient $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ les équations des faces. Si A, B,

Fig. 2.



C, D sont les sommets du tétraèdre, on peut supposer que $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ sont les équations des faces opposées respectivement aux sommets A, B, C, D. La transformation homographique la plus générale est alors définie par les formules

$$\rho X = \alpha X_1, \qquad \rho Y = \beta Y_1, \qquad \rho Z = \gamma Z_1, \qquad \rho T = \gamma T_1.$$

Soit un point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1. Menons la droite $M_1 \alpha_1 \alpha_2$ qui rencontre les deux arêtes opposées AB et CD du tétraèdre, et prenons le point

$$M_2(x_2, y_2, z_2, t_2),$$

tel que le rapport anharmonique $(M_1 \alpha_1 M_2 \alpha_2)$ ait une valeur donnée. Entre les coordonnées des points M_1, M_2 on a alors les relations

$$(1) \qquad \frac{x_1}{x_2} = k \frac{t_1}{t_2}, \qquad \frac{y_1}{y_2} = k \frac{t_1}{t_2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Menons maintenant par le point M_2 la droite qui s'appuie sur les arêtes opposées AB, DC, et prenons le point $M_3(x_3, y_3, z_3, t_3)$, tel que le rapport anharmonique des quatre nouveaux points ait une autre valeur donnée; on a alors

$$(2)\qquad \frac{x_2}{x_3} = \frac{t_2}{t_3}, \qquad \frac{y_2}{y_3} = k_1 \frac{t_2}{t_3}, \qquad \frac{z_2}{z_3} = k_1 \frac{t_2}{t_3}.$$

Recommençons enfin les mêmes constructions avec le point M_3 et les arêtes opposées AC, BD, de manière à obtenir le point $M(x, y, z, t)$; on aura ainsi

$$(3)\qquad \frac{x_3}{x} = k_2 \frac{t_3}{t}, \qquad \frac{y_3}{y} = \frac{t_3}{t}, \qquad \frac{z_3}{z} = k_2 \frac{t_3}{t}.$$

Si l'on multiplie membre à membre les équations correspondantes (1), (2), (3), on obtient finalement

$$(4)\qquad \frac{x_1}{x} = k k_2 \frac{t_1}{t}, \qquad \frac{y_1}{y} = k k_1 \frac{t_1}{t}, \qquad \frac{z_1}{z} = k_1 k_2 \frac{t_1}{t}.$$

La comparaison, avec les formules

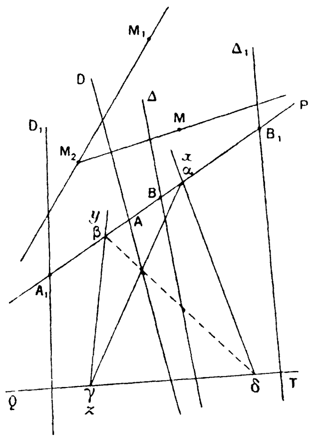
$$\rho X = \alpha X_1, \qquad \rho Y = \beta Y_1, \qquad \rho Z = \gamma Z_1, \qquad \rho T = \gamma T_1,$$

montre immédiatement que les équations (4) définissent entre M_1 et M la transformation homographique la plus générale.

On peut se demander maintenant s'il ne serait pas possible d'obtenir la transformation homographique la plus générale en répétant deux fois la transformation définie au début. *A priori*, le problème paraît possible d'une infinité de manières, car la transformation homographique la plus générale dépend de quinze paramètres; or, les deux transformations successives dont elle devrait résulter sont définies quand on donne les deux couples de directrices, qui dépendent de seize paramètres. Mais nous allons voir qu'on ne peut obtenir, de cette manière, la transformation homographique la plus générale.

Soient, en effet, D, D_1 les directrices de la première transformation, Δ, Δ_1 les directrices de la transformation suivante. On sait qu'il existe, en général, deux droites P, Q rencontrant les quatre droites D, D_1, Δ, Δ_1. Appelons A et A_1 les points de rencontre de P avec D

Fig. 3.



et D_1; appelons de même B et B_1 les points de rencontre de P avec Δ et Δ_1. Si l'on considère les points α et β, points doubles de l'involution définie par les deux couples de points correspondants (A, A_1) et (B, B_1), le point β correspond au point α dans la transformation dont les directrices sont D et D_1; par suite, dans la transformation dont les directrices sont Δ et Δ_1, le point α correspond au point β; donc, finalement, le point α se correspond à lui-même. Il en résulte que si les couples de droites D, D_1, Δ, Δ_1 existent, ces droites s'appuient sur deux arêtes opposées du tétraèdre des points doubles de la transformation homographique la plus générale.

Soit donc $\alpha\beta\gamma\delta$ le tétraèdre des points doubles que nous prendrons pour tétraèdre de référence et soient

$$\mathrm{Y} - a\mathrm{X} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} + a\mathrm{X} = 0,$$
$$\mathrm{Z} - b\mathrm{T} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Z} + b\mathrm{T} = 0$$

les équations des droites D et D_1 qui divisent harmoniquement les arêtes opposées $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ du tétraèdre. Si x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 sont les coordonnées des points M_1 et M_2, on doit avoir

$$y_1 - \lambda y_2 - a(x_1 - \lambda x_2) = 0,$$
$$z_1 - \lambda z_2 - b(t_1 - \lambda t_2) = 0,$$
$$y_1 - \lambda y_2 + a(x_1 - \lambda x_2) = 0,$$
$$z_1 - \lambda z_2 + b(t_1 - \lambda t_2) = 0.$$

On en déduit, en éliminant λ,

$$(1) \qquad \frac{x_1}{t_1} = \frac{b}{a}\frac{y_2}{z_2}, \qquad \frac{y_1}{t_1} = ab\frac{x_2}{z_2}, \qquad \frac{z_1}{t_1} = b^2\frac{t_2}{z_2}.$$

Il en résulte que si les équations des droites Δ et Δ_1 sont respectivement

$$\mathrm{Y} - a'\mathrm{X} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} + a'\mathrm{X} = 0,$$
$$\mathrm{Z} - b'\mathrm{T} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Z} + b'\mathrm{T} = 0,$$

les coordonnées (x, y, z, t) du point M, obtenu au moyen de M_2 et de Δ, Δ_1, comme M_2 a été obtenu au moyen de M, D et D_1, sont liées à x_2, y_2, z_2, t_2 par les relations

$$(2) \qquad \frac{x_2}{t_2} = \frac{b'}{a'}\frac{y}{z}, \qquad \frac{y_2}{t_2} = a'b'\frac{x}{z}, \qquad \frac{z_2}{t_2} = b'^2\frac{t}{z}.$$

En comparant avec les formules (1) on en déduit

$$\frac{x_1}{t_1} = \frac{ba'}{b'a}\frac{x}{t}, \qquad \frac{y_1}{t_1} = \frac{ab}{a'b'}\frac{y}{t}, \qquad \frac{z_1}{t_1} = \frac{b^2}{b'^2}\frac{z}{t},$$

formules qui ne dépendent que des rapports $\frac{a}{a'}$ et $\frac{b}{b'}$.

Elles ne définissent donc pas la transformation homographique la plus générale.