NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. LACOUR

Sur la surface de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 437-445

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__437_0>

[M²4d]

SUR LA SURFACE DE STEINER;

PAR M. E. LACOUR,
Maître de Conférences à l'Université de Nancy.

Une surface est dite *unicursale* quand les coordonnées d'un point quelconque de la surface peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles de deux paramètres. On peut regarder les deux paramètres comme les coordonnées d'un point pris dans un plan auxiliaire (Π) et rapporté à deux axes fixes. A tout point m du plan (Π) correspond alors un seul point M de la surface; en supposant de plus qu'à un point M de la surface correspond en général un seul point m du plan (Π), on dit que la surface est *représentée* sur le plan (Π) et l'on désigne le point m sous le nom d'*image* du point M.

Nous allons étudier ici une surface unicursale du quatrième ordre, signalée par Steiner et qui peut être représentée sur un plan, de façon que les sections planes de la surface aient pour images des coniques. Nous choisirons, dans les propriétés bien connues de cette surface, celles dont la démonstration permettra de montrer le plus simplement l'utilité de ce mode de représentation.

1. *Représentation de la surface sur un plan.* — La surface de Steiner peut être définie à l'aide de l'équation

$$(S) \qquad Y^2Z^2 + Z^2X^2 + X^2Y^2 - 2XYZ = 0,$$

si on la rapporte à trois axes, OX, OY, OZ, convenablement choisis. On voit de suite qu'elle a un point triple à l'origine et trois droites doubles passant par ce point, les droites OX, OY, OZ.

Une sécante variable passant par le point triple rencontre la surface en un seul point variable : de là résulte la possibilité de représenter la surface sur un plan. Nous allons d'abord insister sur cette représentation.

Soient α, β, γ les paramètres directeurs d'une sécante passant par le point O, et X, Y, Z les coordonnées d'un point M pris sur cette sécante, de sorte qu'on peut poser

$$X = \alpha\rho, \qquad Y = \beta\rho, \qquad Z = \gamma\rho.$$

En exprimant que le point M est sur la surface, on trouve

$$(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)\rho = 2\alpha\beta\gamma,$$

puis

$$X = \frac{2\alpha^2\beta\gamma}{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2},$$

$$Y = \frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2},$$

$$Z = \frac{2\alpha\beta\gamma^2}{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}.$$

Ces formules se simplifient si l'on pose

$$x = \beta\gamma, \qquad y = \gamma\alpha, \qquad z = \alpha\beta;$$

on obtient ainsi

$$X = \frac{2yz}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Y = \frac{2zx}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad Z = \frac{2xy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

et il est facile de vérifier que, quels que soient x, y, z, les valeurs de X, Y, Z, définies par ces formules, satisfont à l'équation de la surface (S).

Nous regarderons x, y, z comme les coordonnées homogènes d'un point m pris dans un plan (Π) et rapporté à deux axes $\omega\xi$, $\omega\eta$ choisis dans ce plan : on voit d'abord que, à tout point m du plan (Π), les formules précédentes font correspondre un seul point M de la surface (S). Réciproquement, à un point M pris sur la surface et non situé sur les droites doubles OX, OY, OZ correspond un seul point m du plan (Π), celui dont les coordonnées homogènes sont définies par les égalités

$$Xx = Yy = Zz.$$

A chacun des points pris sur l'une des lignes doubles correspondent deux points du plan (Π) situés sur l'un des axes $\omega\xi$, $\omega\eta$ ou sur la droite de l'infini. Par exemple au point

$$X = h, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0,$$

correspondent les deux points

$$x = 0, \qquad h(y^2 + z^2) - 2yz = 0:$$

ces points, situés sur $\omega\eta$, sont conjugués par rapport aux deux points b et b' de cet axe pour lesquels on a

$$y^2 - z^2 = 0.$$

Enfin, au point triple O de la surface correspondent trois points sur le plan (Π), le point ω et les points à l'infini sur les axes $\omega\xi$, $\omega\eta$.

2. *Les sections planes de* (S) *ont pour images des coniques*.— La surface S ayant trois droites doubles, la section, par un plan quelconque, a trois points doubles, et comme cette section est une ligne du quatrième degré elle est unicursale [1]. De plus, une section plane quelconque de (S) a pour image une conique; car la condition nécessaire et suffisante pour que le point (X, Y, Z) de la surface soit sur le plan

$$uX + vY + wZ + h = 0,$$

[1] M. Picard a démontré que les seules surfaces algébriques, dont toutes les sections planes sont unicursales, sont les surfaces réglées unicursales et la surface du quatrième ordre de Steiner.

est que le point correspondant (x, y, z) du plan (Π) satisfasse à la condition

$$(C) \qquad 2uyz + 2vzx + 2wxy + h(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

qui est bien l'équation d'une conique : nous appellerons conique (C) l'une quelconque des coniques, images des sections planes de (S). Toutes les coniques (C) divisent harmoniquement les deux segments aa' et bb', dont les extrémités sont déterminées par les équations

$$aa' \begin{cases} y = 0, \\ x^2 - z^2 = 0, \end{cases} \qquad bb' \begin{cases} x = 0, \\ y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

Ces conditions suffisent pour déterminer le système linéaire des coniques (C), système qui dépend de trois paramètres variables.

3. *L'image de la section par un plan tangent se décompose en deux droites. Équation tangentielle.* — La section par un plan tangent présente un point double au point de contact, en plus des trois points doubles situés sur OX, OY, OZ; mais une ligne du quatrième degré qui a quatre points doubles doit se décomposer. On est donc conduit à penser que la surface de Steiner est coupée suivant deux coniques par l'un quelconque de ses plans tangents.

Il est facile de vérifier que l'image de la section par un plan tangent se décompose en deux droites. Pour cela, il suffit de calculer les coordonnées u_1, v_1, w_1, h_1 du plan tangent en un point $M(X_1, Y_1, Z_1)$ à l'aide des coordonnées x_1, y_1, z_1 de l'image du point de contact. On a d'abord

$$\begin{aligned} u_1 &= X_1(Y_1^2 + Z_1^2) - Y_1 Z_1, \\ v_1 &= Y_1(Z_1^2 + X_1^2) - Z_1 X_1, \\ w_1 &= Z_1(X_1^2 + Y_1^2) - X_1 Y_1, \\ h_1 &= - X_1 Y_1 Z_1; \end{aligned}$$

puis

$$\rho u_1 = x_1(y_1^2 + z_1^2 - x_1^2),$$
$$\rho v_1 = y_1(z_1^2 + x_1^2 - y_1^2),$$
$$\rho w_1 = z_1(x_1^2 + y_1^2 - z_1^2),$$
$$\rho h_1 = -2x_1 y_1 z_1.$$

La conique image de la section

$$C(x, y, z) \equiv h_1(x^2 + y^2 + z^2) + 2u_1 yz + 2v_1 zx + 2w_1 xy = 0$$

a bien pour point double le point x, y, z, puisque les équations

$$\tfrac{1}{2}C'_x \equiv h_1 x + w_1 y + v_1 z = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}C'_y \equiv w_1 x + h_1 y + u_1 z = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}C'_z \equiv v_1 x + u_1 y + h_1 z = 0$$

sont vérifiées identiquement quand on y fait

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad z = z_1.$$

Réciproquement, si la conique

$$(C) \qquad h(x^2 + y^2 + z^2) + 2uyz + 2vzx + 2wxy = 0$$

se décompose en deux droites, c'est l'image de la section de la surface (S) par l'un de ses plans tangents, car, si l'on exprime que la conique (C) admet comme point double le point x, y, z, on obtient trois équations qui déterminent, à un facteur commun près, les valeurs de u, v, w, h, et les valeurs ainsi déterminées sont les coordonnées du plan tangent à la surface (S) au point ayant pour image le point x_1, y_1, z_1.

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour que le plan* (u, v, w, h) *soit tangent à la surface* (S) *est que la section de la surface par ce plan ait pour image une conique qui se décompose en deux droites.*

On aura donc l'équation tangentielle de la surface (S) en égalant à zéro le discriminant du premier membre de l'équation

$$h(x^2 + y^2 + z^2) + 2uyz + 2vzx + 2wxy = 0,$$

ce qui donne

$$h^3 - h(u^2 + v^2 + w^2) + 2uvw = 0.$$

Remarques. — On peut voir directement que, si une ligne de la surface (S) a pour image une droite δ, cette ligne est une conique. Cela résulte de ce que les coordonnées x, y, z d'un point de δ sont des fonctions linéaires d'un paramètre λ; par suite, les coordonnées X, Y, Z du point correspondant de la surface sont, chacune, le quotient de deux trinomes du deuxième degré en λ.

Donc, quand l'image de la section par un plan P se décompose en deux droites δ et δ', la section se décompose en deux coniques dont les images sont précisément les droites δ et δ'.

Il est facile de *construire géométriquement les deux droites δ et δ', en lesquelles se décompose l'image de la section par un plan tangent,* quand on se donne l'image m du point de contact. En effet, les droites δ et δ' divisent harmoniquement les deux segments aa', bb' (*voir* n° 2); ce sont donc les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples de droites (ma, ma') et (mb, mb'). Cette involution est celle des couples de tangentes menées de m aux coniques inscrites dans le quadrilatère $aba'b'$. Donc δ *et* δ' *sont les tangentes menées en m aux coniques du faisceau tangentiel* $AA' + \lambda BB' = 0$ *qui passent par le point m,* $AA'BB'$ désignant les premiers membres des équations tangentielles des points $aa'bb'$.

4. *Plans tangents singuliers.* — Pour que les tangentes menées de m aux coniques inscrites dans le quadrilatère $aa'bb'$ soient confondues, il faut et il suffit que le point m soit sur l'un des côtés du quadrilatère.

Dans ce cas, l'image de la section par le plan tangent correspondant au point m se compose de deux droites confondues; la section par ce plan tangent doit se composer de deux coniques confondues et le plan tangent doit être un plan tangent singulier.

Il est facile de le vérifier par le calcul. Les coordonnées des points a, a', d'une part, b, b', d'autre part, sont données par les équations

$$\begin{array}{ll} y = 0, & x = 0, \\ x^2 - z^2 = 0, & y^2 - z^2 = 0. \end{array}$$

On en déduit, pour les équations des côtés du quadrilatère,

$$\begin{array}{ll} x + y + z = 0, & x - y + z = 0, \\ x + y - z = 0, & -x + y + z = 0. \end{array}$$

Quand le point m est sur le côté $x + y + z = 0$, l'image de la section par le plan tangent au point correspondant de (S) est $(x + y + z)^2 = 0$, ou encore

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0.$$

On reconnaît sur cette équation l'image de la section par le plan

$$X + Y + Z + 1 = 0.$$

On voit ainsi qu'aux quatre côtés du quadrilatère correspondent les quatre plans tangents

$$\begin{array}{r} X + Y + Z + 1 = 0, \\ X - Y - Z + 1 = 0, \\ -X + Y - Z + 1 = 0, \\ -X - Y + Z + 1 = 0, \end{array}$$

Comme vérification, on peut mettre l'équation de la surface (S) sous l'une des formes

$$\begin{array}{l} (YZ + ZX + XY)^2 = 2XYZ(X + Y + Z + 1), \\ (-YZ + ZX + XY)^2 = 2XYZ(X - Y - Z + 1), \\ (YZ - ZX + XY)^2 = 2XYZ(-X + Y - Z + 1), \\ (YZ + ZX - XY)^2 = 2XYZ(-X - Y + Z + 1), \end{array}$$

dont chacune met en évidence l'un des plans tangents singuliers et la conique suivant laquelle il touche la surface (S).

Ainsi, *la surface de Steiner admet quatre plans tangents singuliers et chacun de ces plans touche la surface le long d'une conique.*

On s'assure, à l'aide de l'équation tangentielle, qu'il n'y a pas d'autres plans tangents singuliers que les quatre plans qui viennent d'être considérés.

5. *Ligne parabolique.* — En général, la ligne parabolique d'une surface peut être définie comme le lieu d'un point M de la surface tel que dans la section de la surface par le plan tangent en M, le point double qui se trouve au point de contact a ses deux tangentes confondues.

Dans le cas particulier de la surface de Steiner, la section par le plan tangent se compose de deux coniques ayant déjà trois points communs sur les droites doubles OX, OY, OZ. Si ces coniques doivent encore être tangentes au point de contact, elles sont nécessairement confondues, et il en est de même des deux droites δ et δ', images de ces deux coniques. On conclut de là qu'un point M de la ligne parabolique a pour image un point pris sur l'un des côtés du quadrilatère $aba'b'$; le point M lui-même doit alors être sur la conique de contact de l'un des quatre plans tangents singuliers.

Donc, pour la surface de Steiner, la ligne parabolique *se décompose en quatre coniques et ces coniques sont les lignes de contact de la surface avec ses quatre plans tangents singuliers.*

6. *Lignes asymptotiques.* — Proposons-nous de trouver sur la surface (S) une ligne telle que, en chacun de ses points, cette ligne soit tangente à l'une des deux

coniques, section de la surface par le plan tangent en ce point (on peut définir de cette façon les lignes asymptotiques de la surface S).

On sait que, quand une surface est représentée point par point sur un plan, si deux lignes de la surface sont tangentes en un point M, leurs images sont tangentes au point m, image de M. Or, les deux coniques, section de la surface (S) par le plan tangent en un point M de (S), ont pour images les deux droites δ et δ' dont l'ensemble forme une conique (C) ayant pour point double le point m image de M. On est donc ramené à trouver dans le plan (Π) une ligne telle qu'en chacun de ses points cette ligne soit tangente à l'une des droites δ et δ' qui correspondent à ce point et la solution de ce problème est immédiate si l'on se rappelle la construction géométrique des droites δ et δ'.

On a vu que les droites δ et δ' correspondant à un point m du plan (Π) sont les tangentes en m aux coniques du faisceau tangentiel $AA' + \lambda BB' = 0$ qui passent par ce point. Si donc le point m se déplace sur l'une des coniques du faisceau tangentiel, la tangente au déplacement sera à chaque instant l'une des deux droites δ et δ'.

Donc les lignes cherchées dans le plan (Π) sont les coniques inscrites dans le quadrilatère $aa'bb'$, et comme ce sont les images des lignes asymptotiques de (S), on voit que pour la surface de Steiner l'équation différentielle des lignes asymptotiques peut être intégrée en s'aidant des considérations géométriques qui viennent d'être exposées.