NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

D. SINTSOF

Sur les dérivées d'une fonction algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 411-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__411_1>

[C1b]

SUR LES DÉRIVÉES D'UNE FONCTION ALGÉBRIQUE;

PAR M. D. SINTSOF,

Professeur agrégé à l'Université de Kasan.

Soit y une fonction algébrique déterminée par l'équation irréductible

$$(1)\qquad y^n + p_1 y^{n-1} + \ldots + p_{n-1} y + p_n = 0,$$

dont les coefficients p_i sont des fonctions rationnelles de la variable indépendante x.

Nous aurons alors facilement

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{10} + \alpha_{11} y + \ldots + \alpha_{1,n-1} y^{n-1}),$$

Δ étant la discriminante de (1) par rapport à y.

De même

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \Delta^{-2}(\alpha_{20} + \alpha_{21} y + \ldots + a_{2,n-1} y^{n-1}),$$

et, en général,

$$(3)\qquad \frac{d^p y}{dx^p}\ \Delta^{-p}(\alpha_{p0} + \alpha_{p1} y + \ldots + \alpha_{p,n-1} y^{n-1}),$$

Or je veux montrer que les fonctions rationnelles α_{ik} peuvent être exprimées explicitement à l'aide des p_i et de leurs dérivées successives.

En effet, employant le même artifice à l'aide duquel M. Raffy ([1]) a démontré les formules de M. Liouville, je multiplie (2) par Δy^k et forme la somme des expressions pareilles pour $y = y_1, y_2, \ldots, y_n$, les y_i étant les racines différentes de (1).

Nous aurons

$$(4)\quad \frac{1}{k+1}\Delta s'_{k+1} = \alpha_{10}s_k + \alpha_{11}s_{k+1} + \ldots + \alpha_{1,n-1}s_{x+n-1},$$

si l'on désigne $s_k = \Sigma y_i^k$ la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines de (1).

Si l'on donne à k les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$, on obtient n équations, qui, résolues par rapport à α_{1i}, en donnent la valeur sous forme de déterminant

$$(5)\quad \alpha_{1i} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{i-1} & s'_1 & s_{i+1} & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_i & \frac{1}{2}s'_2 & s_{i+2} & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{n+i-2} & \frac{1}{n}s'_n & s_{n+i} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

De même, l'équation (3), multipliée par $\Delta^p y^k$, nous donne, à l'aide de l'égalité

$$y^k y^{(p+1)} = \frac{d}{dx}(y^k y^{(p)}) - k y^{k-1} y' y^{(p)}$$

la relation suivante

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_{p+1,0}s_k + \alpha_{p+1,1}s_{k+1} + \ldots + \alpha_{p+1,n-1}s_{k+n-1} \\ &\quad = \Delta^{p+1}\frac{d}{dx}[\Delta^{-p}(\alpha_{p,0}s_k + \alpha_{p,1}s_{k+1} + \ldots + \alpha_{p,n-1}s_{n+k-1})] \\ &\quad - \Delta\left(\alpha_{p,0}s'_k + \frac{k}{k+1}\alpha_{p,1}s'_{k+1} + \ldots + \frac{k}{k+n-1}\alpha_{p,n-1}s'_{k+n-1}\right). \end{aligned} \right.$$

([1]) *Sur les quadratures algébriques et logarithmiques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. II, p. 184-206; 1883).

En donnant à k les valeurs, 0, 1, 2, ... $n-1$ nous obtenons n équations qui déterminent les $\alpha_{p+1,i}$ à l'aide des s_j, s'_j et les $\alpha_{p,k}$. Si donc les $\alpha_{p,k}$ sont connus nous aurons $\alpha_{p+1,j}$. Mais nous avons déterminé les α_{1k}: donc (6) nous donnera les $\alpha_{2,k}$, et ainsi de suite.

On peut remarquer que pour $p=1$ l'expression (6) se simplifie; notamment le premier membre de la seconde partie contient sous le signe de différentiation la quantité $\frac{1}{k+1}s'_{k+1}$; quant au second membre, il se présente sous forme d'un déterminant.

Mais je n'insiste plus sur ces détails ([1]).