Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 385-387

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__385_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1663.

(1894, p 5*)

Si deux variables imaginaires z et z' sont reliées par la relation homographique

$$z = \frac{az'+b}{cz'+d},$$

dans laquelle a, b, c, d sont des quantités imaginaires et si l'une des variables z' décrit une courbe C', la variable z décrit une courbe C qui est superposable à l'une des transformées par rayons vecteurs réciproques de la courbe C'.

Si la courbe C' n'est autre que l'axe des x, la courbe C est, par suite, un cercle. (E. Amigues).

SOLUTION

Par M. J. Destoux.

De la relation

$$z = \frac{az'+b}{cz'+d},$$

on tire

$$(1) \qquad \left(z - \frac{a}{c}\right)\left(z' + \frac{d}{c}\right) = \frac{bc-ad}{c^2}.$$

Posons

$$z - \frac{a}{c} = \rho e^{i\theta}, \qquad z' + \frac{d}{c} = \rho' e^{i\theta'}, \qquad \frac{bc-ad}{c^2} = re^{i\varphi},$$

on a

$$\rho\rho' e^{i(\theta+\theta')} = re^{i\varphi},$$

d'où

$$\rho\rho' = r, \qquad \theta + \theta' = \varphi.$$

Ces égalités montrent que, si l'on prend le point $-\frac{d}{c}$ pour pôle d'inversion, il existe une transformée par rayons vecteurs réciproques de C' qui est superposable à C. On opérera cette superposition en faisant glisser la courbe C parallèlement à elle-même, de manière que le point $\frac{a}{c}$, considéré comme invariablement lié à C, parcourt la droite $(cz - a) = (a - d)t$, et vienne coïncider avec $-\frac{d}{c}$; on fera ensuite tourner la courbe C autour de $-\frac{d}{c}$ de l'angle $-\varphi$ dans son plan, et de 180° autour de la parallèle à Ox menée par $-\frac{d}{c}$ et choisie comme axe.

De ce qui précède, il résulte que lorsque z' parcourt une ligne droite quelconque du plan, en particulier l'axe des x, le point z parcourt un cercle.

Question 1667.

(1891, p. 38*.)

Un point M *parcourt une ellipse de foyers* F *et* F'. *Le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux cercles de diamètres* FF' *et* FM *est une conique ayant un foyer au centre de l'ellipse.* (BARISIEN.)

SOLUTION

par M. H. LEZ.

Soient x', y' les coordonnées du point M pris sur l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

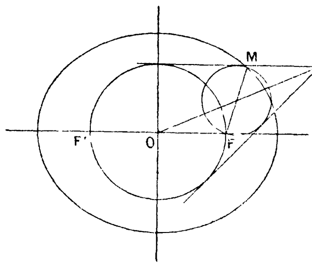
celles du milieu de FM seront

$$\alpha = \frac{c + x'}{2}, \qquad \beta = \frac{y'}{2},$$

et le cercle décrit sur FM, comme diamètre, sera représenté par

$$\left(x - \frac{c + x'}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y'}{2}\right)^2 = \left(\frac{a - ex'}{2}\right)^2,$$

puisque $FM = (a - ex')$.



Or, le cercle décrit sur FF', comme diamètre, ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = c^2,$$

le point de rencontre P des tangentes extérieures sera déterminé par

$$x = \frac{c(c + x')}{2c + ex' - a}, \qquad y = \frac{y'c}{2c + ex' - a}.$$

De ces expressions, on tire

$$y' = \frac{y}{x}(c + x'), \qquad y'c = y(2c + ex' - a),$$

et celles-ci donnent à leur tour

$$x' = \frac{(2c - a)x - c^2}{c - ex}, \qquad y' = \frac{y(2c - a - ce)}{c - ex}.$$

Portant ces valeurs dans la relation

$$b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2,$$

on trouvera, pour le lieu du point P, la conique Σ

$$x^2[(a - c)^2 - 4c^2] + 4c^2(a + c)x$$
$$+ y^2(a - c)^2 - c^2(a + c)^2 = 0.$$

Mettant cette équation sous la forme

$$(x^2 + y^2)(a - c)^2 = c^2[2x - (a + c)]^2,$$

on voit facilement que la conique Σ a pour foyer le centre de l'ellipse et pour directrice correspondante

$$2x = a + c.$$