NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. RIPERT

Sur la discussion de l'équation des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 329-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__329_0>

[L^1 1 a]

SUR LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION DES CONIQUES;

PAR M. L. RIPERT,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

Le Tableau par lequel on résume ordinairement la discussion de l'équation générale

$$(1)\qquad AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DXT + 2EYT + FT^2 = 0$$

ne donne que l'espèce de la conique; mais l'examen de l'équation donne d'autres résultats. Nous posons

$$h = ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2, \qquad a = CF - E^2,$$
$$b = DE - BF, \qquad \ldots, \qquad e = BD - AE, \qquad f = AC - B^2.$$

THÉORÈME I. — *L'espèce d'une courbe du deuxième ordre donnée par l'équation* (1) *et sa situation tant par rapport à la droite de l'infini qu'à l'origine, sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :*

$f > 0$. Coniques coupant la droite de l'infini en deux points imaginaires.	$Ah > 0$		Ellipse imaginaire.	L'origine est, pour : $AF < 0$, intérieure; $F = 0$, sur la courbe; $AF > 0$, extérieure. Les coordonnées du centre sont : $x = d$, $y = e$, $t = f$. L'équation de la polaire de l'origine est : $DX + EY + FT = 0$.
	$h = 0$		Point réel d'intersection de deux droites imaginaires.	
	$Ah < 0$		Ellipse réelle.	
$f < 0$. Coniques coupant la droite de l'infini en deux points réels et distincts.	$h \neq 0$		Hyperbole.	
	$h = 0$		Deux droites réelles se coupant en un point fini.	
$f = 0$. Coniques coupant la droite de l'infini en deux points confondus.	$h \neq 0$		Parabole.	
	$h = 0$	a ou $c > 0$	Deux parallèles imaginaires	se coupant en un point réel de la droite de l'infini.
		$a = c = 0$	Deux parallèles confondues	
		a ou $c < 0$	Deux parallèles réelles et distinctes	

De ce théorème on passe immédiatement, par corrélation, au théorème suivant :

Théorème II. — *La situation, tant par rapport à l'origine qu'à la droite de l'infini et l'espèce d'une courbe de deuxième classe donnée par l'équation*

$$(2)\qquad AU^2 + 2BUV + CV^2 + 2DUR + 2EVR + FR^2 = 0$$

sont indiquées, sans exception, par le Tableau suivant :

$f > 0$. Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (intérieure) deux tangentes imaginaires.	$Ah > 0$		Conique imaginaire.	L'espèce de la conique est, pour : $AF < 0$, ellipse ; $F = 0$, parabole ; $AF > 0$, hyperbole. Les coord. de la polaire de l'origine sont : $u = d$, $v = e$, $r = f$. L'équation du centre est : $DU + EV + FR = 0$.
	$h = 0$		Droite réelle de jonction de deux points imaginaires.	
	$Ah < 0$		Conique réelle.	
$f < 0$. Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (extérieure) deux tangentes réelles et distinctes.	$h \neq 0$		Conique réelle.	
	$h = 0$		Deux points réels sur droite de jonction finie.	
$f = 0$. Coniques auxquelles on peut mener de l'origine (sur la courbe) deux tangentes confondues.	$h \neq 0$		Conique réelle.	
	$h = 0$	a ou $c > 0$	Deux points imaginaires	sur droite de jonction réelle passant par l'origine.
		$a = c = 0$	Deux points confondus	
		a ou $c < 0$	Deux points réels et distincts	

On peut ajouter d'autres détails, tous corrélatifs.

Supposons maintenant que X, Y, T soient des coordonnées *trilinéaires normales*, $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$ étant les équations des côtés a_1, a_2, a_3 du triangle de référence $A_1 A_2 A_3$. Il est alors facile de voir que :

L'équation (1) représente une conique ne coupant pas, touchant ou coupant le côté a_3, selon que l'on a $f \lesseqgtr 0$. La conique est imaginaire si l'on a $f > 0$, $Ah > 0$ (ou encore $f = h = 0$, a ou $c > 0$) ; elle est réelle dans tous les autres cas. Le point ($f > 0$, $h = 0$) n'est pas sur a_3, non plus que le point commun aux droites

($f < 0, h = 0$); les droites ($f = h = 0$) se coupent sur a_3. Le sommet A_3 est intérieur ou extérieur, selon que l'on a $AF \lesseqgtr 0$. Les coordonnées du pôle de a_3 sont d, e, f; l'équation de la polaire de A_3 est

$$DX + EY + FT = 0.$$

Résultats analogues pour les couples (a_1, A_1) et (a_2, A_2).

La conique est ellipse, parabole ou hyperbole, selon que l'on a

$$\varphi = a_1^2 a + 2 a_1 a_2 b + a_2^2 c + 2 a_1 a_3 d + 2 a_2 a_3 e + a_3^2 f \gtrless 0.$$

Les coordonnées du centre sont φ'_{a_1}, φ'_{a_2}, φ'_{a_3}.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer, par passage direct de l'équation (1) à l'équation (2), les résultats corrélatifs.