NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. DEDEKIND

Sur les équations à coefficients rationnels

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 201-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__201_1>

[A3c]

SUR LES ÉQUATIONS A COEFFICIENTS RATIONNELS;

PAR M. R. DEDEKIND, de Brunswick.

Jahresbericht der D. M. V., Tome I, 1892 (G. Reimer, Berlin).

(Traduit par M. L. LAUGEL.)

L'existence de théorèmes sur les équations, légitimes pour un degré quelconque fini, mais qui ne peuvent être admis pour des équations de degré infiniment grand sans discussion préalable, est un fait aujourd'hui reconnu par tous les mathématiciens. Mais comme la décision à rendre n'est pas toujours facile à trouver, je prends la liberté de traiter ici un cas particulier qui n'est pas sans importance. Dans la théorie des équations qui sont de degré *fini* et ont tous leurs coefficients *rationnels*, on démontre le théorème connu suivant :

I. *Lorsque l'équation irréductible* $\varphi(x) = 0$ *a une racine commune avec l'équation* $\psi(x) = 0$, *chaque racine de la première équation est aussi une racine de la seconde.*

Mais ce théorème, lorsque le degré de l'équation $\psi(x)=0$ est *infiniment grand*, cesse en général d'être exact, et ce fait a lieu même pour de telles équations dont le premier membre $\psi(x)$ est une série de puissances à coefficients rationnels, convergente pour *toutes* les valeurs de x. C'est là une conséquence évidente du théorème :

II. *Si nous désignons par* α *un nombre réel quelconque,* IL EXISTE *une telle équation* $\psi(x)=0$ *de degré infiniment grand, ou même de degré fini, qui a pour* UNIQUE *racine* RÉELLE α.

A-t-on démontré l'exactitude de cette proposition, il en résulte une évidente contradiction avec le théorème I, lorsque l'on choisit pour α une racine d'une équation irréductible $\varphi(x)=0$ (par exemple $x^2-2=0$) qui admet au moins deux racines réelles α et β. Il ne s'agit donc par conséquent que de démontrer le théorème II, et l'on n'a ici besoin que de considérer le cas de α *positif,* puisque le cas opposé s'y ramène en remplaçant x par $-x$; au cas $\alpha=0$, l'on peut naturellement prendre $\psi(x)=x$.

De tout nombre positif α, d'une manière analogue et avec le même mode de détermination que, lors d'un développement en fraction continue usuelle, on déduira une suite de nombres *entiers* a_1, a_2, a_3, ..., et une suite de *restes* correspondants, c'est-à-dire de nombres ε_1, ε_2, ε_3, ... qui satisfont tous à la condition

$$0 \leqq \varepsilon < 1,$$

à l'aide de la règle suivante :

On posera d'abord

$$\frac{1}{\alpha}=a_1+\varepsilon_1.$$

où a_1 est déterminé comme étant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}$, ε_1 étant, par conséquent, déterminé comme reste; mais pour chaque indice n plus grand l'on posera

$$\frac{2\varepsilon_1}{\alpha^2} = a_2 + \varepsilon_2, \quad \frac{3\varepsilon_2}{\alpha^2} = a_3 + \varepsilon_3, \quad \ldots \quad \frac{n\varepsilon_{n-1}}{\alpha^2} = a_n + \varepsilon_n, \quad \ldots,$$

tous les nombres a suivants comme plus grands entiers et *tous* les restes ε sont de la sorte parfaitement déterminés. Il est clair, du reste, qu'*aucun* des nombres a n'est *négatif*.

Alors la fonction parfaitement définie

$$\psi(x) = -1 + a_1\frac{x}{1} + a_2\frac{x^3}{1.2} + a_3\frac{x^5}{1.2.3} + \ldots + a_n\frac{x^{2n-1}}{\Pi(n)} \ldots$$

possède toutes les propriétés énoncées dans le théorème II. En effet :

1° Les coefficients de $\psi(x)$ sont tous des nombres *rationnels*.

2° Puisque $\varepsilon_{n-1} < 1$, par conséquent $a_n < \frac{n}{\alpha^2}$, et le terme général de la série $\psi(x)$ est inférieur, en valeur absolue, à

$$\frac{x}{\alpha^2}\,\frac{(x^2)^{n-1}}{\Pi(n-1)},$$

d'où il résulte, comme l'on sait, que la série $\psi(x)$ (comme il en est de la série exponentielle) converge pour *chaque* valeur de x.

3° De la définition des nombres a et ε, il résulte que la somme formée de $n+1$ termes

$$-1 + a_1\frac{\alpha}{1} + a_2\frac{\alpha^3}{1.2} + a_3\frac{\alpha^5}{1.2.3} + \ldots + a_n\frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)}$$

est égale à

$$-\varepsilon_n\frac{\alpha^{2n-1}}{\Pi(n)},$$

et, comme cette somme pour n croissant sans limite devient infiniment petite, il en résulte $\psi(\alpha) = 0$; autrement dit, α est une *racine* de l'équation $\psi(x) = 0$.

4° Puisque aucun des nombres a n'est négatif, mais qu'à la vérité au moins l'un d'eux est positif [en vertu de $\psi(\alpha) = 0$], et comme ensuite, abstraction faite du terme constant -1, la variable x, dans la série, se présente élevée seulement à des puissances d'exposant impair, $\psi(x)$, en même temps que x, parcourra toujours en croissant la totalité du domaine réel depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et, par conséquent aussi, ne prendra la valeur zéro que pour l'*unique* valeur $x = \alpha$; autrement dit, l'équation $\psi(x) = 0$ n'admet *aucune racine réelle, hormis* α. C. Q. F. D.

Ainsi se trouve démontré que le théorème I est *sujet à caution* pour les équations $\psi(x) = 0$ de degré infiniment grand. Cette démonstration n'est certes pas sans valeur, car divers géomètres sont arrivés à penser que, en appliquant ce théorème, sujet à caution, à l'exemple

$$\psi(x) = \sin x,$$

on pourrait obtenir une démonstration de la transcendance du nombre π qui n'exigerait qu'un petit nombre de lignes.

La démonstration du théorème II, c'est facile à voir, peut être modifiée d'une foule de manières. Il est, en même temps, clair que le théorème est aussi valable pour un nombre quelconque fini de racines réelles α assignées d'avance (1).

---

(1) M. Dedekind me prie de mentionner ici un Mémoire de M. A. Hurwitz (*Acta mathematica*, t. XIV; 1889) où la même question a été traitée d'une manière beaucoup plus générale. (L. L.)