Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 139-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__139_2>

BIBLIOGRAPHIE.

TRAITÉ D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, par MM. *Cor* et *Riemann*. — In-8°, 460 p. Nony, 1898.

Ce ne sont pas les Traités d'Algèbre élémentaire qui manquent, et il est certain que la plupart sont, en bien des points, excellents; mais il faut avouer que la plupart ont aussi, surtout là où ils cessent d'être excellents, un air de famille qui se perpétue avec une ténacité singulière; les changements que l'on observe à chaque nouveau venu portent surtout sur les parties bonnes qui, assurément, en deviennent meilleures encore, mais ne s'observent guère sur les autres qui demeurent dans la plus immobile imperfection.

Les auteurs n'ont pas non plus la tâche trop facile; ils ont à compter avec la tradition, les programmes, les douces habitudes des examinateurs de toute catégorie, la hâte des éditeurs et les épines du sujet; car, même élémentaire, l'Algèbre n'est point sans parties épineuses. Comment écrire un livre en restant au-dessus de toutes ces influences, l'écrire pour lui-même et pour soi-même, selon la formule de l'Art pour l'Art, tempérée par le seul respect de la Science?

Je ne sais si c'est là ce qu'ont voulu faire MM. Cor et Riemann en écrivant leur Livre, mais je suis bien tenté de le croire : la tradition et les épines semblent les avoir très peu gênés; quant au reste, je gage qu'en dépit du frontispice de leur œuvre, ils n'en ont eu souci.

Aussi quel air d'aisance et de liberté dans ces belles pages; il y a une fraîcheur, un rajeunissement des choses qui vous enchantent; des questions usées jusqu'aux moelles vous prennent un air de jeunesse dont on demeure étonné; je citerai la Section consacrée à l'*équation du second degré;* c'est un véritable joyau : il est impossible d'être plus simple et plus précis, plus riche et plus souple; on voit défiler en raccourci, dans quelques pages d'une langue mathématique exquise, toute la théorie des équations entières : les changements de signes, les fonctions symétriques, la transformation, l'élimination; le vieux sujet en est entièrement rajeuni et vivifié; et ce souffle de renouveau se retrouve dans l'exposition, qui vient ensuite, de la méthode si belle et si judicieuse de M. Girod pour la discussion des problèmes du second degré, méthode qui a donné à cette partie de l'Algèbre élémentaire une consistance dont elle manquait entièrement auparavant, et qui n'avait pas encore paru, je crois, dans aucun livre didactique.

Plus loin, nous entrons dans la théorie des fonctions, avec les notions précises de limite et de continuité, le théorème de Cauchy et l'étude directe des fonctions entières et rationnelles les plus simples. L'étude des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires fait l'objet du Chapitre suivant : nous y trouvons une démonstration rigoureuse de l'égalité

$$(a^x)^{x'} = a^{xx'},$$

au lieu du lamentable cercle vicieux qui constitue l'une des plus immobiles imperfections dont j'ai parlé plus haut; et une belle étude, qui me semble entièrement nouvelle, de l'erreur dans le calcul logarithmique, un petit modèle de précision et d'élégance dans une question où elles ne se rencontrent généralement pas. Je n'aime pas la démonstration des inégalités $\sin x < x < \tang x$, par la considération des aires; elles résultent trop évidemment de la définition même du nombre x, bien antérieure à la mesure de l'aire d'un secteur.

Le dernier Chapitre est consacré aux dérivées, avec d'intéressants exemples d'études de fonctions et la construction des développements en série des fonctions exponentielles logarithmiques et circulaires.

Les auteurs appellent *série* ce qui est communément appelé maintenant une *suite infinie*. La logique voudrait que, suivant que l'on considère les termes d'une suite infinie au point de vue de leur somme ou de leur produit, on parlât de *somme infinie* ou de *produit infini;* cette dernière dénomination est usuelle; il semble que, dans ces derniers temps surtout, le mot *série* tende à prendre exactement le sens de la locution *somme infinie,* à peu près inusitée jusqu'ici [1]. Peut-être eût-il convenu de maintenir ce sens au mot *série,* et, dans tous les cas, de ne pas le *rétablir* dans le sens de *suite infinie,* terme qui me paraît très convenable, et en faveur duquel on peut invoquer au moins l'ancienneté et l'étymologie.

Mais je n'ai encore dit que tout le bien que je pense de la seconde Partie du beau Livre qui nous occupe. La première ne me plaît assurément pas autant.

Le Livre s'ouvre naturellement par une théorie des opérations sur les nombres positifs et négatifs, d'une belle simplicité, mais où les auteurs ont peut-être été trop préoccupés d'être courts; ainsi n'ont-ils pas suffisamment insisté, je crois, sur la signification algébrique dont est susceptible toute expression arithmétique par suite de l'identité du calcul des nombres positifs avec celui des valeurs absolues.

---

[1] J. Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* nos 40 et 41. Dans le *Calcolo differenziale* de A. Genocchi, le mot *série* est employé dans le même sens que par MM. Cor et Riemann; dans la plupart des auteurs antérieurs à notre quart de siècle, par exemple dans Gauss, le mot *série* est employé indifféremment dans le sens de *suite infinie* et de *somme infinie.*

L'étude des polynomes qui vient ensuite ne me satisfait pas entièrement. Je ne comprends pas qu'il y ait lieu de définir à nouveau la somme, la différence ou le produit de deux ou plusieurs polynomes; il me paraît qu'il faut seulement constater que le résultat de ces différentes opérations définies antérieurement peut lui-même être obtenu sous la forme de polynome réduit; ainsi, je ne puis admettre qu'il y ait une convention nouvelle dans ce fait que $-f(x)$ représente le polynome $f(x)$ dont on a changé tous les signes. Enfin, il y a la question capitale de l'identité des polynomes obtenus comme résultats d'une suite d'opérations. quand on les effectue en suivant deux voies différentes, qui demeure un peu dans l'ombre : la démonstration, par exemple, de ce théorème que, dans un produit de plusieurs polynomes, on peut remplacer quelques-uns d'entre eux par leur produit préalablement effectué, est à peine esquissée; l'identité

$$[f(x)+g(x)]\,h(x)=f(x)\,h(x)+g(x)\,h(x),$$

indispensable dans la théorie de la division, est simplement affirmée. Ajouterai-je que cette question des polynomes au début de l'Algèbre élémentaire est un peu irritante, parce qu'elle y est déplacée; qu'elle n'est pas absolument indispensable pour ce qui suit, et qu'elle viendrait beaucoup plus à point au début de l'étude des fonctions, à propos des fonctions entières, alors que, par les notions déjà acquises de limites, la question de l'identité peut être immédiatement résolue.

Quoi qu'il en soit, celui qui comparera cette exposition des principes du calcul algébrique avec ce qui s'écrivait, sur le même sujet, il y a seulement quelques années, sera frappé du chemin parcouru et des progrès véritablement considérables qui ont été réalisés et qui ont leur origine dans les profondes leçons faites à l'École Normale par M. Jules Tannery.

Nous arrivons ensuite dans des régions moins épineuses où la clarté et l'élégance reprennent leurs droits : la théorie du plus grand commun diviseur, l'étude des équations et inéquations du premier degré, celle des déterminants et leur application aux équations linéaires. Dans la théorie des déterminants, les auteurs ont supprimé la notation à double indice et cela pour le plus grand profit de la clarté.

Suis-je parvenu à donner une idée suffisante de la richesse de ce Volume de moins de 500 pages? De la liberté avec la-quelle il a été composé, du soin avec lequel il a été écrit? De la richesse des matières et de la nouveauté des méthodes? Je l'ai jugé en toute franchise, car il est de ces livres longuement médités et venus à leur heure, qui n'ont rien à redouter de la critique, qui ont en eux-mêmes leur force et qui n'attendent pas d'un éloge complaisant le succès dû à leur très haut et très réel mérite.

H. PADÉ.

LEÇONS D'ALGÈBRE, par *Ch. Briot*, revues et mises au courant des nouveaux programmes, par M. *E. Lacour*. Deuxième Partie, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales, 17e édition. Delagrave, 1897.

Les *Leçons d'Algèbre* que nous signalons forment, en dépit du titre trop modeste, un Ouvrage vraiment nouveau.

Les personnes dont l'éducation mathématique s'est faite à l'époque où paraissaient les livres d'enseignement de Briot savent quelle en était la lumineuse simplicité; les points essentiels de chaque théorie y apparaissent, dégagés des propositions secondaires; l'abstraction inévitable de certaines définitions ou démonstrations devenait intuitive, des images appropriées en faisant saisir le sens et dirigeant l'enchaînement logique des idées.

La simplicité aussi réelle qu'apparente des programmes du temps facilitait alors le développement de ces qualités. Depuis, les cadres de l'enseignement se sont peu à peu élargis; à tort ou à raison, diverses théories s'y sont glissées et sont généralement développées dans les cours. Les *Leçons d'Algèbre* de Briot, sous leur forme primitive, devenaient incomplètes; les élever au niveau de l'enseignement actuel, et, cependant, conserver leurs qualités fondamentales, semblaient deux tâches incompatibles; M. Lacour a réussi à les concilier.

Élève de Briot, M. Lacour déploie dans son enseignement les qualités de son maître. Je me souviens encore quel était notre étonnement lorsque, à l'École Normale, où certains de nos plus brillants camarades avaient été formés à ses leçons, ceux-ci nous exposaient avec quelle facilité ils avaient appris, sans l'emploi d'indices encombrants, la théorie des déterminants et des équations linéaires. A l'encontre d'une erreur facile, c'était montrer que les démonstrations, faites sur des exemples particuliers, y gagnent en clarté, sans rien perdre de leur généralité.

Sans négliger les commençants, pour lesquels le nouvel Ouvrage reste ce qu'était celui de Briot, un guide où trouver un développement net et concis des notions nouvelles qui les arrêtent, M. Lacour, en signalant d'astérisques les passages que ceux-ci peuvent négliger, a songé aussi, soit aux bons élèves de Mathématiques spéciales, qu'anime le désir de faire quelques pas au delà du domaine limité par les programmes, soit aux étudiants de nos Facultés des Sciences, pour lesquels la différence des enseignements du Lycée et de l'Université laisse quelques lacunes que ne comble ni l'un ni l'autre.

Nous signalerons particulièrement aux premiers les Chapitres relatifs aux déterminants et aux équations linéaires, les principes fondamentaux des théories des séries et des intégrales définies, notions neuves qui parfois déconcertent nos jeunes élèves. Le calcul des fonctions symétriques, la détermination numérique des racines d'une équation sont également très soigneusement traités; là, comme d'ailleurs dans tout le cours de l'Ouvrage, les applications pratiques de la théorie se font sur de nombreux exemples.

Quant aux élèves plus avancés, les candidats à l'École Normale, entre autres, ils liront avec fruit le Chapitre relatif aux formes quadratiques, les propriétés de la forme adjointe, la formule de Gauss et ses applications dues à M. Darboux, la théorie des invariants et covariants des formes, toutes questions qui, quoique disparues de la lettre des programmes, s'imposent dans des applications si nombreuses et si intéressantes de la Géométrie analytique. Dans le même ordre d'idées, ils apprendront la résolution de l'équation du 4[e] degré, basée sur l'existence d'invariants de son premier membre, les principes de la transformation des équations et en particulier de la transformation bilinéaire. Nous leur signalerons encore la démonstration de la transcendance de e, d'après un principe dû à Hurwitz, démonstration d'ordre aussi simple que celle du théorème classique : le nombre e ne peut être racine d'une équation du second degré à coefficients commensurables.

Enfin, les étudiants trouveront développées dans ces *Leçons* les propriétés des séries entières par rapport à une variable et des produits infinis, la théorie des fonctions symétriques des racines d'un système de deux équations algébriques, généralisation immédiate de la même théorie relative à une seule variable, avec son application à l'élimination de deux inconnues et l'extension du théorème de Bézout à un système de trois équations, questions qui n'ont pas place dans les cours des lycées, et dont cependant les étudiants ont souvent à admettre les résultats pour suivre avec fruit les leçons de leurs maîtres.

Ajoutons à cette énumération incomplète la présence de nombreux exercices dont beaucoup découvrent bien des horizons nouveaux : polynomes de Legendre, nombres de Bernoulli, fonctions de Bessel, intégrales eulériennes, série hypergéométrique de Gauss, fonctions elliptiques et leur propriété d'addition. Et le tout prenant place dans un Volume de 700 pages à peine! Cette simple remarque est peut-être ce qui le recommande le plus éloquemment. A. TRESSE.

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR 1898; Paris, Gauthier-Villars et fils.

La maison Gauthier-Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1898. — Ce petit Volume compact contient comme toujours une foule de renseignements scientifiques qu'on ne trouve que là. Le Volume de cette année contient en outre les Notices suivantes : *Sur la stabilité du système solaire;* par M. H. POINCARÉ. — *Notice sur l'Œuvre scientifique de M. H. Fizeau;* par M. A. CORNU. — *Sur quelques progrès accomplis avec l'aide de la Photographie dans l'étude de la surface lunaire;* par MM. M. LOEWY et P. PUISEUX. — *Sur les travaux exécutés en* 1897 *à l'observatoire du mont Blanc;* par M. J. JANSSEN. — *Discours prononcés au cinquantenaire académique de M. Faye, le* 25 *janvier* 1897; par M. J. JANSSEN et M. M. LOEWY. In-18 de VI-806 pages, avec 2 Cartes magnétiques : 1fr,50 (franco 1fr,85).

LE RATIONNEL, par *Gaston Milhaud,* agrégé de Mathématiques, docteur ès lettres, chargé de cours de Philosophie à la Faculté des Lettres de Montpellier. (1 vol.

in-12 de la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine,* 2^{fr}, 50. Félix Alcan, éditeur.)

Cet Ouvrage fait suite à l'*Essai sur la certitude logique,* du même auteur, dont la deuxième édition a récemment paru. Il comprend six études intitulées : *Mathématique et Philosophie, La Science rationnelle, A propos de la Géométrie grecque, Une condition du progrès scientifique, Le raisonnement scientifique et le syllogisme, Sur la notion de limite en Mathématique, Pensée pure et intuition.*

Le but de M. Milhaud, en composant et en réunissant ces études, a été de montrer que, dans une recherche de la connaissance rationnelle, on doit plus tenir compte qu'il n'est fait d'ordinaire d'une activité spontanée de l'esprit, et qu'on ne doit pas craindre d'aller jusqu'à reconnaître à cette activité créatrice quelque degré de contingence et d'indétermination. Il n'a pas la prétention d'apporter un système nouveau, mais il insiste sur le besoin, pour la pensée philosophique que sollicitent de pareils problèmes, d'entrer dans une certaine direction et de ne pas négliger un facteur qui lui semble avoir son importance.