CH. BIOCHE

Sur une certaine surface du troisième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 111-115

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__111_1>

[$M^2 3d$]

SUR UNE CERTAINE SURFACE DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

La surface qui a pour équation

$$(X + Y + Z + T)^3 - X^3 - Y^3 - Z^3 - T^3 = 0,$$

à laquelle Clebsch a donné le nom de *surface diagonale*, présente certaines particularités que je crois bon de signaler ici ([1]).

I.

1. D'abord la surface diagonale a ses vingt-sept droites réelles et distinctes, et la détermination de celles-ci peut s'effectuer facilement. Si l'on ordonne l'équation par rapport à une des lettres, T, par exemple, elle devient

$$T^2(X+Y+Z)+T(X+Y+Z)^2+(Y+Z)(Z+X)(X+Y)=0,$$

ou

$$T(X+Y+Z)(X+Y+Z+T)+(Y+Z)(Z+X)(X+Y)=0;$$

cette forme d'équation met en évidence les droites

$$\begin{cases} T=0, \\ Y+Z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} T=0, \\ Z+X=0, \end{cases} \quad \begin{cases} T=0, \\ X+Y=0, \end{cases}$$

et, à cause de la symétrie de l'équation initiale, on peut trouver d'autres systèmes de trois droites dans chacune des faces du tétraèdre de référence; on a ainsi douze droites.

2. On voit de plus que le plan

$$X+Y+Z+T=0$$

coupe la surface suivant un triangle formé par les traces des plans

$$Y+Z=0, \quad Z+X=0, \quad X+Y=0$$

sur le premier.

([1]) *Voir* un très intéressant Mémoire de Eckardt au Tome X des *Math. Annalen*: 1876.

3. On trouve les autres droites en menant par les trois dernières droites obtenues des plans convenablement déterminés. Pour simplifier le calcul posons

$$X + Y = 2P, \qquad Z + T = 2Q,$$
$$X - Y = 2P', \qquad Z - T = 2Q'.$$

L'équation de la surface peut s'écrire

$$4(P + Q)^3 - P^3 - 3PP'^2 - Q^3 - 3QQ'^2 = 0.$$

L'intersection de la surface par le plan

$$P + \lambda Q = 0$$

est donnée par

$$4(1 - \lambda)^3 Q^3 + \lambda^3 Q^3 + 3\lambda QP'^2 - Q^3 - 3QQ'^2 = 0.$$

Si l'on supprime dans cette équation le facteur Q, il reste

$$[4(1 - \lambda)^3 + \lambda^3 - 1]Q^2 + 3\lambda P'^2 - 3Q'^2 = 0;$$

cette équation est celle d'une quadrique qui se réduit à un système de deux plans si l'on a

$$\lambda = 0 \qquad \text{ou} \qquad 3(1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0.$$

Les solutions $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ conduisent à des droites déjà obtenues; il reste à prendre

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2};$$

on a donc les droites

$$\begin{cases} 2(X + Y) + (3 + \sqrt{5})(Z + T) = 0, \\ 2(Z - T) - (\sqrt{5} + 1)(X - Y) = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2(X + Y) + (3 + \sqrt{5})(Z + T) = 0, \\ 2(Z - T) + (\sqrt{5} + 1)(X - Y) = 0 \end{cases}$$

et celles qu'on obtient en changeant le signe devant $\sqrt{5}$; on a ainsi quatre droites. Les huit autres s'obtiennent en permutant les lettres X, Y, Z, T.

On a donc les vingt-sept droites.

II.

4. Il peut arriver qu'en un point d'une surface toutes les courbures soient nulles, on a alors des ombilics d'une nature spéciale qui ont pour homologues, si l'on transforme homographiquement la surface, des points de même nature. Ces points peuvent exister sur des surfaces du troisième ordre, il peut même y en avoir une infinité. M. de Saint-Germain a montré que ce cas se présentait pour les surfaces dont l'équation est de la forme

$$Y^3 + XF(X, Y, Z, T) = 0,$$

F étant une fonction du deuxième degré (*Comptes rendus,* 14 décembre 1885).

Il est facile de constater que chaque sommet du tétraèdre de référence est un de ces ombilics spéciaux; par exemple le plan

$$X - Y + Z = 0$$

coupe la surface suivant trois droites situées dans les faces

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

On a encore six ombilics spéciaux aux points d'intersection des arêtes du tétraèdre avec le plan

$$X + Y + Z + T = 0.$$

Par exemple, le plan

$$X + Y = 0$$

contient les droites

$$\begin{cases} X + Y = 0, \\ Z + T = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} X - Y = 0, \\ T = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} X + Y = 0, \\ Z = 0. \end{cases}$$

On a donc dix ombilics spéciaux dont quatre sont les sommets d'un tétraèdre, et six les traces des arêtes sur un même plan.

Il est facile de voir que les surfaces ayant pour équation

$$(X + Y + Z + T)^m - X^m - Y^m - Z^m - T^m = 0,$$

m étant impair, possèdent aussi douze ombilics ayant même disposition que pour le cas de $m = 3$.