NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ERNEST DUPORCQ

Sur l'hyperboloïde osculateur à une surface réglée le long d'une génératrice

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 17 (1898), p. 106-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1898_3_17__106_1>

[O4dα]

SUR L'HYPERBOLOIDE OSCULATEUR A UNE SURFACE RÉGLÉE LE LONG D'UNE GÉNÉRATRICE;

PAR M. ERNEST DUPORCQ.

Dans le numéro de septembre dernier de l'*Intermédiaire des Mathématiciens,* j'ai, à la suite de réponses fort intéressantes de M. Mannheim et de M. d'Ocagne, indiqué sans démonstration une solution d'un problème proposé par M. Chomé. La construction à laquelle je suis parvenu fournit un moyen de résoudre la question suivante, dont cette Note contiendra le développement :

Construire l'hyperboloïde osculateur à la surface réglée engendrée par une droite abc qui s'appuie sur trois courbes données (a), (b) *et* (c).

Il suffit évidemment de construire la génératrice A de cet hyperboloïde, autre que abc, qui passe, par exemple, par a. Nous remarquerons d'abord que cette génératrice est commune à tous les hyperboloïdes H, osculateurs en a à la courbe (a), et tangents en b et c aux courbes (b) et (c) : car, si l'on prend la droite abc pour axe des z et le plan osculateur en a à (a) pour plan des xy, l'axe des x étant d'ailleurs la tangente à cette courbe, les hyperboloïdes H ont pour équation générale

$$mx^2 + \lambda y^2 + ayz + bzx + \mu xy + y = 0.$$

équation dans laquelle les paramètres a et b sont déterminés par la connaissance des plans tangents le long de l'axe des z, et le paramètre m, par celle de la courbure de (a). On voit bien que la génératrice A, représentée par les équations

$$y = 0, \qquad mx + bz = 0,$$

ne dépend pas des paramètres variables λ et μ. D'ailleurs, la courbe (a) n'intervenant que par son plan osculateur et sa courbure en a, on peut évidemment la supposer plane.

Ceci posé, considérons le plan P, mené par b parallèlement au plan de la courbe (a) : nous allons chercher sur ce plan la trace α de la génératrice A.

Soient bb' et bt les traces sur ce plan des plans tangents en b et c aux hyperboloïdes H, et soit cc' la parallèle menée de c à bt. Tous les hyperboloïdes H sont tangents en c à cc' et osculateurs en a à la courbe (a). Or on sait que toutes les quadriques qui passent par cinq points coupent un plan quelconque P suivant des coniques harmoniquement circonscrites à une même conique Γ, la droite, joignant deux des cinq points considérés, et le plan déterminé par les trois autres ayant évidemment pour traces sur le plan P un point et une droite qui, par rapport à Γ, sont pôle et polaire. Ici, deux des cinq points à envisager sont confondus en c sur la droite cc', et les trois autres sont confondus en a sur la courbe (a).

Pour déterminer dans le plan P la conique Γ correspondant à ces cinq points, considérons sur la courbe (a)

un point quelconque a'', et désignons par Γ' la conique du plan P qui correspond aux cinq points suivants : deux points c et c' confondus en c sur la droite cc', deux points a et a' confondus en a sur la courbe (a), enfin le point a''; cette conique Γ' a pour limite la conique Γ quand le point a'' se rapproche infiniment du point a. Or, désignons par r la trace de la droite ca'' sur le plan P : elle se trouve sur la courbe (r), suivant laquelle la courbe (a), vue du point c, se projette sur le plan P, et la tangente en b à cette courbe est évidemment la droite $b\alpha$. Par rapport à la conique Γ les traces des droites cc', ca et ca'' ont respectivement pour polaires les traces des plans $aa'a''$, $c'a'a''$ et $c'aa'$; autrement dit :

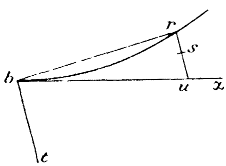
1° Γ' est une parabole d'axe parallèle à bt;

2° Elle est tangente en b à br;

3° La polaire du point r par rapport à Γ' est la droite $b\alpha$.

Soit u le point où $b\alpha$ coupe la parallèle ru à bt, et

Fig. 1.



soit s le milieu du segment ru. Ce point étant évidemment sur la parabole Γ', on en déduit immédiatement que si r se rapproche indéfiniment de b sur la courbe (r) la limite Γ de la parabole Γ' a en b une courbure opposée à celle de la courbe (r), et moitié moindre. D'après une propriété connue du centre de courbure de la parabole, la directrice de Γ passe donc par le centre de courbure p de la courbe (r) en b, c'est-à-dire par la trace sur le plan P de la droite $c\omega$, ω désignant le centre de courbure en a de la courbe (a).

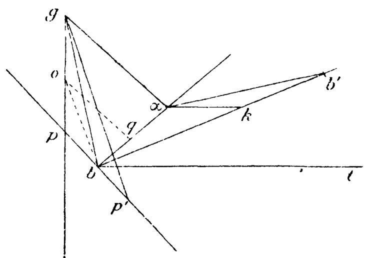
Nous avons donc obtenu une parabole Γ à laquelle sont harmoniquement circonscrites les coniques suivant lesquelles le plan P coupe les hyperboloïdes H : ces coniques sont d'ailleurs tangentes en b à la droite bb', qu'elles coupent, par conséquent, en des points conjugués par rapport à Γ : elles passent, par suite, par le pôle de cette droite, qui, situé sur la droite $b\alpha$, n'est donc autre que le point α lui-même.

La construction de ce point est donc ramenée au problème suivant :

Construire le pôle α de la droite bb' par rapport à la parabole Γ, tangente en b à $b\alpha$, dont l'axe a pour direction bt, et dont la directrice passe par le point p de la normale bp en b.

Soient b' l'intersection de bb' avec Γ, K le milieu de bb', q le point de concours des perpendiculaires bq et αq aux droites $\alpha b'$ et $b\alpha$. Ce point est l'orthocentre du triangle aplati formé par la tangente $\alpha b'$ et deux tan-

Fig. 2.



gentes confondues avec $b\alpha$. La droite pq est donc la directrice de Γ et est, par suite, perpendiculaire à αK. Or, en direction, αK est conjuguée de bb' par rapport aux droites αb et $\alpha b'$: la perpendiculaire qp' à bb' est donc conjuguée de qp par rapport à l'angle $bq\alpha$; autrement dit, b est le milieu de pp'.

Par suite, pour construire le point α, il suffit de prendre le symétrique p' de p par rapport à b, de mener les perpendiculaires pq et $p'q$ aux droites bt et bb', et de projeter leur point commun q sur la trace $b\alpha$ du plan tangent en a aux hyperboloïdes H.

Le milieu o du segment pq est évidemment situé sur la perpendiculaire bo à bb' et sur la perpendiculaire qo au milieu de $b\alpha$. Si donc on suppose connus le point ω, la génératrice A et la trace bb', on voit que la droite pq passe par le point fixe o quand le point c se déplace sur la droite ab : cette remarque permet de construire facilement la trace bt du plan tangent en c aux surfaces réglées satisfaisant à ces données, ce qui était justement la question posée par M. Chomé.

Supposons que le plan de la courbe (a) soit normal à la droite ab : les droites pq sont alors les traces sur le plan P des plans déterminés par le point ω et les normales aux surfaces H aux différents points de ab : la droite ωo appartient donc au paraboloïde de ces normales. Le plan $a\omega oq$ est donc le plan tangent à ce paraboloïde au point ω; d'ailleurs, le point a est le point central de la génératrice $a\omega$ et le plan tangent à ce point est le plan ωab. Le paramètre de distribution des plans tangents au paraboloïde des normales est donc, pour la génératrice $a\omega$:

$$K = \frac{a\omega}{\tang \widehat{baq}},$$

ou encore, en désignant par φ l'angle $ba\alpha$,

$$K = \frac{2a\omega}{\tang\varphi}.$$

Or, si l'on désigne par ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure principaux de la surface H en a, on a évidemment, d'après la relation d'Euler,

$$\frac{1}{a\omega} = \frac{1}{\rho_1}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\rho_2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

et

$$\frac{1}{\rho_1}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\rho_2}\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0.$$

On en déduit aisément

$$K = \sqrt{\rho_1\rho_2}.$$

On retrouve ainsi ce théorème, dû à Ossian Bonnet, et dont la démonstration directe est immédiate :

Si l'on considère le paraboloïde des normales à une surface réglée S *le long d'une génératrice, le paramètre de distribution des plans tangents à ce paraboloïde le long d'une des normales considérées est égal à la moyenne géométrique des rayons de courbure principaux de* S *au pied de cette normale.*

Ce théorème s'appliquerait évidemment aussi à la normalie à une surface, admettant pour base une ligne asymptotique de cette surface. Son application aurait permis d'établir rapidement la construction précédemment obtenue, dans le cas où la courbe (a) est normale à la génératrice abc.