Nouvelles annales de mathématiques

E.-M. Lémeray

Sur les racines de l'équation $x = a^x$. Racines imaginaires

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 54-61

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__54_0>

[A31] [G6c]

SUR LES RACINES DE L'ÉQUATION $x = a^x$. RACINES IMAGINAIRES;

PAR M. E.-M. LÉMERAY.

L'étude des racines réelles a fait l'objet d'une Note précédente; je m'occuperai ici des racines imaginaires.

Supposons d'abord $a > 1$, et soit

$$\rho e^{\theta\sqrt{-1}}$$

une des racines imaginaires. Posons

$$\rho \cos\theta = u, \qquad \rho \sin\theta = v.$$

La relation à laquelle il faut satisfaire peut s'écrire

$$\rho e^{\theta\sqrt{-1}} = e^{\mathrm{L}a\rho e^{\theta\sqrt{-1}}} = e^{\mathrm{L}a(u+v\sqrt{-1})}.$$

Prenons les logarithmes; l'équation équivaut aux deux suivantes :

$$\mathrm{L}\rho = u\mathrm{L}a, \tag{1}$$

$$\theta = v\mathrm{L}a. \tag{2}$$

Si, sur deux axes de coordonnées rectangulaires, nous figurons les courbes représentatives de ces équations, leurs intersections donneront la représentation des racines de notre équation; il faudra toutefois ne pas tenir compte des points situés entre les droites

$$v = (2k+1)\frac{\pi}{\mathrm{L}a} \qquad \text{et} \qquad v = (2k+2)\frac{\pi}{\mathrm{L}a},$$

ces points correspondant à des racines étrangères. La courbe (1) peut s'écrire

$$\rho = a^u \qquad \text{ou encore} \qquad v = \pm\sqrt{a^{2u} - u^2}.$$

La courbe (2) peut aussi s'écrire

$$\rho = \frac{1}{La}\,\frac{\theta}{\sin\theta} \qquad \text{ou encore} \qquad u = \frac{v}{\operatorname{tang}(vLa)}.$$

On peut donc calculer leurs coordonnées. On peut aussi les tracer géométriquement par points de la manière suivante : soit M un point de la courbe $v = a^u$, menons MN parallèle à OV et ML parallèle à OU ; le cercle ayant O pour centre et OL pour rayon coupe MN en N ; N est un point de la courbe (1).

Par O menons une droite OP faisant avec OU un angle dont la tangente soit égale à $\frac{1}{La}$; par O menons une droite OF_0 faisant avec OU un angle θ; sur OU prenons OT égal à l'arc θ et menons la parallèle TP à OV jusqu'à sa rencontre P avec OP; par P menons une parallèle à OU; elle coupe OF_0 en Q; Q est un point de la courbe (2).

Quand on a $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, la courbe (1) se compose d'une branche fermée AB, et d'une branche infinie C, asymptote à l'exponentielle $v = a^u$. Les points A, B, C ont les mêmes abscisses que les points d'intersection de l'exponentielle $v = a^u$ avec les droites $v = \pm u$. Quand $a = e^{\frac{1}{e}}$, les points B et C se confondent; quand a est plus grand que $e^{\frac{1}{e}}$, les deux branches se fondent en une seule.

Quand $a = e$, la courbe (2) se compose d'une branche non représentée sur la figure, qui coupe OU en S, tel que $OS = 1$; pour $u = -\infty$, elle est asymptote aux droites $v = \pm\pi$; elle se compose aussi d'une infinité de branches telles que DE, comprises chacune entre les droites $v = k\pi$ et $v = (k+1)\pi$ [1], auxquelles elle est

---

[1] Les branches utiles sont celles comprises entre les droites $v = 2k\pi$ et $v = (2k+1)\pi$.

asymptote respectivement pour $u = +\infty$ et $u = -\infty$; elle coupe Ov au point d'ordonnée

$$(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

et les droites $v = \pm u$ respectivement aux points d'ordonnée

$$(2k+1)\frac{\pi}{2} \mp \frac{\pi}{4}.$$

Quand on a une valeur différente de e, la courbe (2) reste semblable à celle qui vient d'être décrite; elle ne fait que changer d'échelle.

Je vais maintenant montrer que, pour un point racine, le module de la dérivée $\frac{da^x}{dx}$ est toujours plus grand que 1. En effet, ce module est

$$M = a^u \mathrm{L}a = \rho \mathrm{L}a.$$

Comme sur un point racine quelconque on vérifie l'équation (2), on a

$$\rho \mathrm{L}a = \frac{\theta}{\sin\theta};$$

on en tire

$$M = \frac{\theta}{\sin\theta},$$

quantité toujours plus grande que 1, sauf pour $\theta = 0$. D'après le théorème déjà rappelé de M. Kœnigs, la substitution

$$\left(\rho e^{\theta\sqrt{-1}},\quad a^{\rho e^{\theta\sqrt{-1}}}\right)$$

ne tendra donc vers aucune racine de l'équation, quelle que soit la valeur initiale. Donc l'expression

$$\left.\begin{matrix} m \\ \cdot \\ a \end{matrix}\right| \rho_0 e^{\theta_0\sqrt{-1}}$$

sera divergente quel que soit a. Mais si la fonction $a^x = \left.\begin{matrix} 1 \\ \cdot \\ a \end{matrix}\right| x$ a une dérivée dont le module est plus grand que 1, en chaque point racine, son inverse $\dfrac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}a} = \overset{-1}{\dot{a}}\Big| x$ aura un module de la dérivée plus petit que 1 ; mais la fonction n'étant pas holomorphe, nous n'aurons convergence par le symbole

$$\overset{-m}{\dot{a}}\Big| \rho_0 e^{\theta_0\sqrt{-1}}$$

que si nous convenons de ne prendre parmi toutes ses déterminations que celle qui est comprise dans le domaine d'un point racine donné.

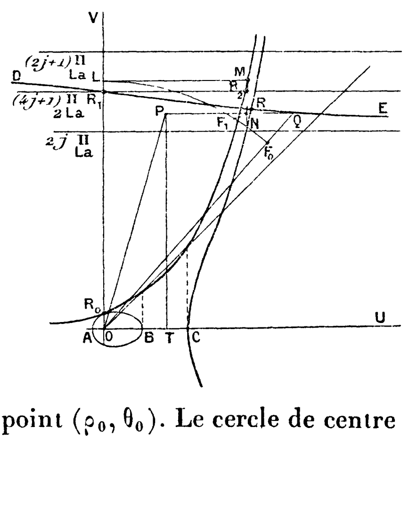
D'une manière générale, étant donné un point (ρ_0, θ_0), cherchons un point (ρ_1, θ_1) ou (u_1, v_1), représentant, dans le système de base a, le logarithme de la quantité

$$\rho_0 e^{\theta_0\sqrt{-1}};$$

on devra avoir

$$\mathrm{L}\rho_0 = u_1 \mathrm{L}a,$$
$$\theta_0 = v_1 \mathrm{L}a.$$

Ces équations permettront de calculer u_1 et v_1, puis ρ_1 et θ_1. Cela correspond à la construction suivante :



soit F_0 le point (ρ_0, θ_0). Le cercle de centre O, passant en F_0, coupe la courbe ABC en N ; la droite OF_0 coupe la courbe DE en Q ; la parallèle à OV passant par N et la parallèle à OU passant en Q, déterminent le point cherché F_1. (Remarquons que les courbes ABC et DE pouvant se construire par points comme on l'a vu plus haut, on peut déterminer F_1 géométriquement au moyen de la courbe $v = a^u$, de droites et de cercles.)

Cela posé, prenons pour initial la quantité $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire

$$\rho_0 = 1, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Elle est représentée par le point R_0 ; en appliquant la construction, nous aurons d'abord le point R, intersection de l'axe OV avec la droite $v = (4j + 1)\frac{\pi}{2La}$, j étant la valeur entière particulière donnée à K dans l'expression de v_1

$$v_1 = \frac{\delta}{La} - (4K + 1)\frac{\pi}{2La},$$

où δ est un angle plus petit que $\frac{\pi}{2}$; en continuant ainsi et attribuant à K la même valeur j, nous obtenons le point R_2, situé sur la courbe

$$v = a^u,$$

et ainsi de suite ; les points obtenus tendront successivement vers le point R qui représente une racine imaginaire. Les racines conjuguées correspondront à l'initial $-\sqrt{-1}$.

Cas de $a < 1$. — Posons $a = \frac{1}{a'}$; nos courbes deviennent

$$(1') \qquad \rho = a'^{-u},$$

$$(2') \qquad \theta = -vLa'.$$

La courbe (1′) est simplement la symétrique de la courbe (1) déjà considérée. Il en est de même de la courbe (2′). Mais dans ce cas les branches qui nous donnent les racines de la proposée sont les symétriques des branches qui précédemment nous donnaient des racines étrangères et inversement.

Ce qui a été dit pour la grandeur du module s'applique encore, et toujours, avec les mêmes conventions; l'expression

$$\left.\begin{array}{c} -m \\ \dot{a} \end{array}\right| \pm\sqrt{-1}$$

tendra vers les racines de l'équation proposée. Soit $a = e^z$; posons

$$U(z) - \sqrt{-1}\,V(z) = \left.\begin{array}{c} -m \\ \dot{e}^z \end{array}\right| +\sqrt{-1}$$

$$U(z) - \sqrt{-1}\,V(z) = \left.\begin{array}{c} -m \\ \dot{e}^z \end{array}\right| -\sqrt{-1} \quad ;$$

d'où

$$U(z) = \frac{\left.\begin{array}{c} -m \\ \dot{e}^z \end{array}\right| \sqrt{-1} + \left.\begin{array}{c} -m \\ \dot{e}^z \end{array}\right| -\sqrt{-1}}{2}$$

$$V(z) = \frac{\left.\begin{array}{c} -m \\ \dot{e}^z \end{array}\right| \sqrt{-1} - \left.\begin{array}{c} -m \\ \dot{e}^z \end{array}\right| \sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on y fait

$$m = -1 \qquad \text{et} \qquad z = \theta,$$

ces fonctions deviennent $\cos\theta$ et $\sin\theta$ qui sont les coordonnées rectangulaires du cercle $\rho = 1$. Ce cercle est le lieu des racines imaginaires de l'équation

$$x^2 - 2ax + 1 = 0,$$

quand a varie de 0 à 1; a est relié à θ par la relation

$$a = \cos\theta.$$

Dans notre cas, éliminons a entre les équations (1) et (2); on a

$$\frac{\theta}{L\rho} = \frac{v}{u} = \operatorname{tang}\theta,$$

d'où

$$\rho = e^{\frac{\theta}{\operatorname{tang}\theta}}. \tag{3}$$

On en tire

$$z = La = \frac{\theta}{v} = \frac{\theta}{\rho\sin\theta} = \frac{\theta}{\sin\theta\, e^{\frac{\theta}{\operatorname{tang}\theta}}}.$$

La courbe (3) est le lieu décrit par les racines imaginaires de notre équation quand a varie; si nous désignons par $u(z)$ et $v(z)$ ce que deviennent les fonctions $U(z)$ et $V(z)$ quand on y fait

$$m = \infty, \qquad z = \frac{\theta}{\sin\theta\, e^{\frac{\theta}{\operatorname{tang}\theta}}},$$

$u(z)$, $v(z)$ sont les coordonnées de la courbe (3), et a est relié à θ par la relation

$$a = \left(e^{\frac{\theta}{\sin\theta}}\right)^{\frac{1}{e^{\frac{\theta}{\sin\theta}}\cos\theta}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{a} = \left(e^{\frac{\overset{2}{\cdot}-\theta}{\sin\theta}}\right)\Bigg|^{\cos\theta}.$$

Si l'on appelle surracine (¹) $n^{\text{ième}}$ de a et si l'on représente par le symbole $\sqrt[n]{a}$ la racine de l'équation

$$\overset{n}{\dot{x}} = a,$$

on a, pour $n = 2$,

$$x^{\cdot x} = a \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{x} = \frac{1}{a},$$

(¹) *Sur les fonctions itératives* (*Association française, Congrès de Bordeaux*, 1895).

et par conséquent

$$\sqrt[2]{a} = \frac{1}{\lim \overset{\pm m}{\dot{a}^{-1}} \Big| e^{\pm 1}},$$

pour les racines réelles et

$$\sqrt[2]{a} = \frac{1}{\lim \overset{\pm m}{\dot{a}^{-1}} \Big| \pm \sqrt{-1}},$$

pour les racines imaginaires.

Dans une prochaine Note, je donnerai des applications de ce qui précède à quelques équations transcendantes et à l'intégration d'une équation aux différences mêlées.