NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-M. LÉMERAY

Racines de quelques équations transcendantes. Intégration d'une équation aux différences mêlées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 540-546

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__540_0>

[A31] [H12bα]

RACINES DE QUELQUES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES. INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION AUX DIFÉRENCES MÊLÉES;

Par M. E.-M. LÉMERAY.

On peut facilement ramener quelques équations transcendantes aux types

$$x = a^x, \qquad x^x = a,$$

que j'ai étudiés dans deux Notes précédentes (décembre 1896, février 1897). Soit l'équation

$$x^{x^m} = a,$$

élevons les deux membres à la puissance m, puis posons $x^m = y$, $a^m = b$, elle devient

$$y^y = b.$$

Équation $x a^x = b$. — Élevons a à la puissance exprimée par les deux membres, on a

$$(a^x)^{a^x} = a^b = c,$$

d'où

$$a^x = \sqrt[2]{c} \qquad \text{et} \qquad x = b(\sqrt[2]{c})^{-1}.$$

L'équation $a^x = kx$ se ramène à la précédente en l'écrivant

$$x a^{-x} = k^{-1}.$$

L'équation $a^x = x + b$ se ramène à son tour à la précédente en écrivant

$$a^{x+b} = a^b(x+b),$$

et posant $x+b = y$.

On peut également réduire les équations un peu plus générales

$$(ax)^{bx^c} = m, \qquad (ax)^p b^{(qx)^c} = m, \qquad (x+k)^m a^{px+q} = b.$$

Pour la première posons $ax = y$, élevons les deux membres à la puissance $b^{-1}ca^c$; posant ensuite $y^c = z$, $m^{b^{-1}ca^c} = n$, elle devient

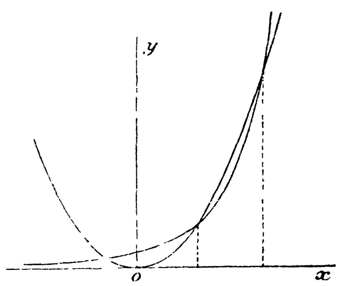
$$z^z = n$$

Pour la deuxième posons encore $ax = y$, élevons à la puissance $p^{-1}c$, on est ramené à la forme $zA^z = B$. La troisième se ramène au même type en posant $x + k = y$. En achevant les calculs, on remarquera que x s'exprime sans que le signe logarithmique y figure.

En résolvant ces équations, il faut d'une part éliminer les racines étrangères introduites; de l'autre, constater que l'on a obtenu toutes les racines de la proposée. Cherchons, par exemple, les intersections réelles des deux courbes $y = a^x$ et $y = bx^2$ ($a > 1$ et $b > 0$).

La *fig.* 1 nous montre qu'il y a toujours une racine

Fig. 1.



réelle négative et qu'il peut exister deux racines réelles égales ou inégales.

Pour résoudre l'équation $a^x = bx^2$ qui rentre d'ailleurs dans un des types signalés plus haut, on peut l'écrire

$$\sqrt{a}^{x} = \sqrt{b}\,x,$$

et l'on a

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sqrt[2]{\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}}\right)^{-1}.$$

Pour que les deux racines positives soient égales il faut que l'on ait

$$\sqrt[2]{\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}}} = \frac{1}{e},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{a}^{-\frac{1}{\sqrt{b}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}},$$

ou encore

$$\sqrt{a}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} = e^{\frac{1}{e}} \qquad \text{ou} \qquad a = e^{\frac{2\sqrt{b}}{e}}.$$

Si a est plus petit que cette valeur, on aura deux racines réelles inégales. Il est clair qu'il faut prendre les radicaux $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ avec le seul signe $+$. On n'obtient pas ainsi la racine négative. Pour l'avoir on changera x en $-x$ et l'on est amené à résoudre l'équation $bx^2 = \frac{1}{a^x}$ qu'on peut écrire $x\sqrt{a}^{x} = \frac{1}{\sqrt{b}}$ et l'on a

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}}\left(\sqrt[2]{\sqrt{a}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}}\right)^{-1},$$

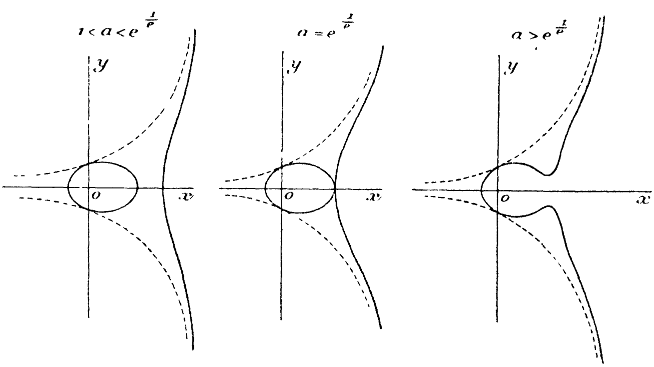
qu'il faudra changer de signe; ainsi les trois racines réelles seront données par la même formule où $\sqrt{a}$ est pris avec le signe $+$; $\sqrt{b}$ avec le signe $+$ pour avoir les deux racines positives, et avec le signe $-$ pour avoir la racine négative.

Le symbole de la surracine deuxième permet encore de résoudre quelques questions. Considérons la courbe représentative de la fonction

$$y = \sqrt{a^{2x} - x^2}$$

[en coordonnées polaires l'équation de cette courbe est $\rho = a^{\rho\cos\omega}$; en coordonnées semi-polaires (abscisse et rayon vecteur) elle est $\rho = a^x$]. Pour $a > 1$, elle peut présenter trois formes, suivant que a est plus petit que $e^{\frac{1}{e}}$, égal à $e^{\frac{1}{e}}$ ou plus grand que $e^{\frac{1}{e}}$. On trouve facilement que pour x infini et positif elle est asymptote aux courbes $y = \pm a^x$ (*fig.* 2), qu'elle est tangente à ces courbes pour $x = 0$; qu'en chacun des points réels où elle coupe l'axe Ox, elle admet une tangente parallèle à Oy.

Fig. 2.



Cherchons les abscisses de ces points d'intersection; pour $y = 0$ il faut avoir $a^x = x$ ou $a^{-x} = x$; les deux racines réelles positives seront les deux valeurs de $\frac{1}{\sqrt[x]{a}}$, égales si $a = e^{\frac{1}{e}}$, inégale si a est plus petit que $e^{\frac{1}{e}}$. La racine négative sera $-\frac{1}{\sqrt[x]{a^{-1}}}$.

Cherchons aussi les abscisses des points où la courbe admet une tangente horizontale. On a

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^{2x} \mathrm{L}a - x}{\sqrt{a^{2x} - x^2}}.$$

On a donc à résoudre l'équation $a^{2x}\mathrm{L}a - x = 0$; posons $x = \frac{\mathrm{L}a}{z}$; il vient

$$a^{\frac{2\mathrm{L}a}{z}} = \frac{1}{z} \qquad \text{ou} \qquad z^z = a^{\frac{1}{2\mathrm{L}a}};$$

on a donc

$$z = \sqrt[2]{a^{-2\mathrm{L}a}} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{\mathrm{L}a}{\sqrt[2]{a^{-2\mathrm{L}a}}}.$$

Les deux valeurs seront distinctes, si la surracine en a deux, c'est-à-dire si l'on a

$$1 < a^{2\mathrm{L}a} < e^{\frac{1}{e}}.$$

Les deux valeurs seront égales (point stationnaire) si l'on a

$$a^{2\mathrm{L}a} = e^{\frac{1}{e}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{L}a = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

L'abscisse est alors

$$x = \frac{1}{\sqrt{2e}}\left(\sqrt[2]{\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2e}} = \sqrt{\frac{e}{2}},$$

et l'ordonnée a pour valeur

$$y = \sqrt{e - \frac{e}{2}} = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

Elle est donc égale à l'abscisse.

Quand on fait a égal à 1, la courbe se réduit à un cercle de rayon 1, décrit autour de l'origine pour centre et à une droite parallèle à Oy à l'infini.

Intégration de l'équation

$$y^{(m+p)} - a y_{-l}^{(m)} = 0,$$

dans laquelle a et i sont deux constantes, y_{-i} étant la valeur de la fonction quand la variable a pour valeur $x - i$.

D'après la série de Taylor, on a

$$y_{-i}^{(m)} = y^{(m)} - \frac{i}{1!} y^{(m+1)} + \frac{i^2}{2!} y^{(m+2)} - \ldots.$$

On a donc à résoudre l'équation linéaire d'ordre infini à coefficients constants

$$0 = y^{(m+p)} - a\left(y^{(m)} - \frac{i}{1!} y^{(m+1)} + \ldots\right).$$

L'équation caractéristique peut s'écrire

$$r^{m+p} - ar^m e^{-ir} = 0.$$

Elle admet d'abord les m racines $r = 0$; ce qui donnera un polynome de degré m représentant l'ensemble des m intégrales particulières indépendantes de i ; il reste

$$r^p = ae^{-ir}.$$

Pour la résoudre, élevons les deux membres à la puissance $\frac{1}{p}$,

$$(a^{-p^{-1}})r = (e^{-ip^{-1}})^r,$$

ce qui la ramène à la forme $\mathrm{A}x = \mathrm{B}^x$ vue précédemment, et les racines seront

$$r = \pm a^{p^{-1}} \left(\sqrt[2]{e^{p^{-1} i a^{p^{-1}}}}\right)^{-1}.$$

Suivant les valeurs attribuées aux quantités a, p, i, il pourra ou non exister des racines réelles; il y en aura trois au plus. En désignant par P, R, S ces trois racines, on en tire les intégrales particulières

$$y = C_{m+1}\, e^{\mathrm{P}x}, \qquad y = C_{m+2}\, e^{\mathrm{R}x}, \qquad y = C_{m+3}\, e^{\mathrm{S}x} \quad (1).$$

---

(1) Si R et S sont égales, on aura $y = e^{\mathrm{R}x}(C_{m+1} + C_{m+2}x)$.

En ce qui concerne les racines imaginaires qui sont conjuguées deux à deux, et d'ordre simple, elles ont pour valeurs

$$a^{p-1}\left[u(-p^{-1}ia^{p-1}) \pm \sqrt{-1}\, v(-p^{-1}ia^{p-1})\right],$$

u et v étant les fonctions considérées dans notre Note du numéro de février.

En ne tenant pas compte des racines étrangères, que l'on reconnaîtra d'ailleurs facilement, il restera une infinité d'intégrales particulières de la forme

$$y = e^{a^{p-1}u(z)x} \left\{ A\cos[a^{p-1}v(z)]x + B\sin[a^{p-1}v(z)]x \right\},$$

où l'on a posé

$$-p^{-1}ia^{p-1} = (z),$$

et A et B étant deux constantes arbitraires.