NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CAHEN

Théorie des régions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 533-539

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__533_0>

[Q4a]

THÉORIE DES RÉGIONS;

PAR M. E. CAHEN.

---

1. On sait que n points distincts déterminent sur une droite $n+1$ segments.

Dans un plan, n droites, dont deux quelconques ne sont pas parallèles, et dont trois quelconques ne passent pas par un même point, déterminent

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{1}+1$$

régions.

Dans l'espace, n plans, dont trois quelconques ne sont pas parallèles à une même droite et dont quatre quelconques ne passent pas par un même point, déterminent

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n}{1}+1$$

régions.

2. Ces formules se généralisent. Considérons, dans l'espace à p dimensions, n variétés à $p-1$ dimensions. Supposons que $p+1$ quelconques de ces variétés ne passent pas par un même point et que p quelconques ne soient pas parallèles à une même variété à une dimension. Je dis que le nombre de régions qu'elles forment est

$$\begin{aligned}P_n^p = {} & \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} \\ & +\frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{1.2\ldots(p-1)}+\ldots+\frac{n}{1}+1.\end{aligned}$$

Cette formule s'établirait d'une façon analogue aux précédentes. On établirait d'abord la formule

$$P_n^p = P_{n-1}^p + P_{n-1}^{p-1};$$

puis, de proche en proche, on en déduirait la formule précédente.

3. L'énoncé purement algébrique de la question précédente est le suivant :

Étant données n fonctions linéaires de p variables, de combien de combinaisons de signes sont-elles susceptibles ?

On suppose que les déterminants d'ordre $p+1$, formés avec les coefficients des variables et les termes indépendants dans $p+1$ fonctions quelconques, ne soient pas nuls, et qu'il en soit de même des déterminants d'ordre p formés avec les coefficients des variables dans p fonctions quelconques.

Dans ces conditions, ce nombre est P_n^p.

Remarquons que, si $n \leqq p$,

$$P_n^p = 2^n,$$

ce qui veut dire que les n fonctions peuvent prendre tous les signes possibles. Autrement dit :

Un système de n inégalités du premier degré à p inconnues, dont les premiers membres satisfont aux conditions indiquées plus haut est toujours compatible si $n \leqq p$.

4. *Théorème*

$$P_n^p + P_n^{n-p-1} = 2^n.$$

Ce théorème se déduit immédiatement de la formule qui donne P_n^p.

5. Maintenant, étant données n fonctions linéaires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, satisfaisant aux conditions précédentes, quelles sont les combinaisons de signes, au nombre de P_n^p, dont elles sont susceptibles?

Supposons que nous sachions résoudre ce problème pour la valeur $n - 1$ de l'indice n. Soit C une combinaison de signes possibles pour les fonctions X_1, $X_2, \ldots, X_{n-1}$.

Nous allons chercher de quel signe est susceptible X_n, étant donné que $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ ont les signes de la combinaison C. Nous recommencerons cette détermination pour toutes les combinaisons C et le problème sera résolu.

D'abord, la fonction X_n est-elle susceptible des deux signes (1)? Si oui, elle sera, par continuité, susceptible de s'annuler. Posons donc $X_n = 0$.

On tire de cette équation la valeur de x_p, par exemple, en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. On porte cette valeur dans les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$. Ces fonctions deviennent fonctions de $p - 1$ variables, et l'on verra si ces fonctions sont susceptibles des signes de la combinaison C. Si oui, c'est que cette combinaison est compatible avec les deux signes de X_n.

Sinon, elle n'est compatible qu'avec un signe de X_n qu'il reste à déterminer. Il suffit pour cela de substituer dans X_n un système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ donnant à $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ les signes de la combinaison C; ou encore un système de valeurs annulant p de ces fonctions et donnant aux $n - p - 1$ autres les signes de la combinaison C (2).

---

(1) En langage géométrique : la variété $X_n = 0$ traverse-t-elle la région C?

(2) En langage géométrique : un sommet de la région C.

Ce système de valeurs n'annule pas X_n, puisque, par hypothèse, $p+1$ fonctions ne s'annulent pas pour une même valeur des variables. On obtient donc pour X_n un certain signe qui est le signe cherché.

Les calculs sont très simples pour $p=1$. Pour $p=2$, la représentation géométrique est très facile à effectuer exactement, et remplace avantageusement le calcul.

6. Nous allons montrer que *le cas de $p+h$ fonctions à p variables se ramène à celui de $p+h$ fonctions à $h-1$ variables.*

Le problème est ainsi simplifié si

$$h-1<p.$$

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{p+h}$ ces $p+h$ fonctions linéaires de p variables.

Cherchons à déterminer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+h}$ de façon que

$$(1)\qquad \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p + \alpha_{p+1} X_{p+1} + \ldots + \alpha_{p+h} X_{p+h}$$

soit identiquement nulle.

Nous obtenons $p+1$ équations linéaires entre les $p+h$ quantités α; nous pourrons exprimer ces $p+h$ quantités en fonctions linéaires de $h-1$ variables. Déterminons les P_{p+h}^{h-1} combinaisons de signes dont elles sont susceptibles. Ces combinaisons sont impossibles pour les fonctions X, puisque l'expression (1) est identiquement nulle.

Ce sont d'ailleurs *toutes* les combinaisons de signes impossibles pour les fonctions X. En effet, le nombre de ces combinaisons impossibles est $2^{p+h} - P_{p+h}^{p}$. Or ce nombre égale P_{p+h}^{h-1} d'après le théorème du n° 4.

Exemple :

$$\begin{aligned}
X_1 &= 3x_1 + x_2 - x_3 + 2,\\
X_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + 1,\\
X_3 &= 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3,\\
X_4 &= 6x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6,\\
X_5 &= 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 11.
\end{aligned}$$

Posons

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 + \alpha_5 X_5 \equiv 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}
3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + \ \ 2\alpha_5 &= 0,\\
\alpha_1 + \alpha_2 - \ \ \alpha_3 + 2\alpha_4 - \ \ 2\alpha_5 &= 0,\\
-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 - 5\alpha_4 + \ \ \ \alpha_5 &= 0,\\
2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 6\alpha_4 + 11\alpha_5 &= 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_1 = \frac{463\alpha_5 - 19}{41},$$

$$\alpha_2 = \frac{-165\alpha_5 + 5}{41},$$

$$\alpha_3 = \frac{-94\alpha_5 - 22}{41},$$

$$\alpha_4 = \frac{-155\alpha_5 - 4}{41}.$$

Les combinaisons de signes possibles pour α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 et par suite impossibles pour X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont contenues dans les colonnes du Tableau suivant, dont la construction est facile à comprendre.

α_5	$-\infty$	$\frac{-4}{155}$	$\frac{-11}{47}$	0	$\frac{1}{33}$	$\frac{19}{463}$	$+\infty$
α_1	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	
α_2	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	
α_3	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	
α_4	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
α_5	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	

7. Dans ce qui précède nous avons supposé que $p+1$ quelconques des variétés ne passaient pas par un même point. Voyons ce qui arrive dans ce cas, ou plus géné-

ralement ce qui arrive lorsque k des variétés à $p-1$ dimensions passent par une variété de dimension h.

Soit $P^p_n(k, h)$ le nombre de régions formées. On peut calculer ces expressions de proche en proche par la formule

$$P^p_n(k, h) = P^p_{n-1}(k, h) + P^{p-1}_{n-1}(k, h-1),$$

valable pour $n-1 \geqq k$, et qui ramene le calcul de $P^p_n(k, h)$ à celui de $P^p_k(k, h)$. Ce dernier se fera au moyen de la formule

$$P^p_k(k, h) = P^p_{k-1}(k-1, h) + P^{p-1}_{k-1}(k-1, h).$$

On arrive ainsi par un calcul de recurrence sans difficulté à la formule générale

$$\begin{aligned} P^p_n(k,h) = 2(1 + C^1_{n-k} + C^2_{n-k} + \ldots + C^h_{n-k})&(1 + C^1_{k-1} + C^2_{k-1} + \ldots + C^{p-h}_{k-1}) \\ &+ C^{h+1}_{n-k}(1 + C^1_k + \ldots + C^{p-h-1}_k) \\ &+ C^{h+2}_{n-k}(1 + C^1_k + C^2_k + \ldots + C^{p-h-2}_k) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ C^{p-1}_{n-k}(1 + C^1_k) \\ &+ C^p_{n-k}, \end{aligned}$$

C^s_r désignant comme a l'ordinaire l'expression

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2\ldots s}.$$

Cette formule est générale en faisant les conventions que

$$P^p_n(k, h) = P^p_n$$

lorsque $h \leqq -1$ et que

$$P^p_n(k, h) \quad \text{ou} \quad P^p_n$$

sont égaux à un quand $p = 0$ et à zéro quand p est négatif.

8. Une autre singularité que peuvent présenter les n variétés c'est que k d'entre elles soient parallèles à

une même variété de dimension h. Si l'on appelle $\Pi_n^p(k, h)$ le nombre de régions formé, on trouve

$$\begin{aligned}\Pi_n^p(k, h) = {} & (1 + C_k^1 + \ldots + C_k^{p-h})(1 + C_{n-k}^1 + \ldots + C_{n-k}^h) \\ & + C_{n-k}^{h+1}(1 + C_k^1 + \ldots + C_k^{p-h-1}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C_{n-k}^{p-1}(1 + C_k^1) \\ & + C_{n-k}^p.\end{aligned}$$

9. Maintenant si l'on considérait n variétés à $p-1$ dimensions dont k passent par une variété de dimension h, k' par une variété de dimension h', etc., k_1 sont parallèles à une variété de dimension h_1, k'_1 à une variété de dimension h'_1, etc.; sans établir de formule générale, on pourra, en tout cas, calculer le nombre de régions formées.

Par exemple, cherchons le nombre de régions formées par six plans, dont trois passent par une même droite D et trois par une autre droite D' ne rencontrant pas D.

Faisons abstraction d'un plan, les cinq autres forment

$$P_5^3(3, 1) = 22 \text{ régions.}$$

Or le sixième plan coupe les cinq précédents suivant cinq droites, dont trois passent par un même point et deux coïncident. Le nombre des régions formées par ces droites est

$$P_4^2(3, 0) = 10.$$

Donc le nombre cherché égale $22 + 10 = 32$.

Si les deux droites D et D' se rencontraient, il faudrait raisonner autrement et l'on trouverait

28 régions.

De même la détermination des combinaisons de signes correspondant à chacune de ces régions se fera par une méthode analogue à celle du n° 5.