

A. HURWITZ

**Sur la réduction des formes
quadratiques binaires**

Nouvelles annales de mathématiques 3^e série, tome 16
(1897), p. 491-501

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__491_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[B 10a]

SUR LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES BINAIRES;

PAR M. A. HURWITZ, de Zurich.

Extrait des *Congress mathematical Papers*, t. I
Exposition de Chicago, 1893.

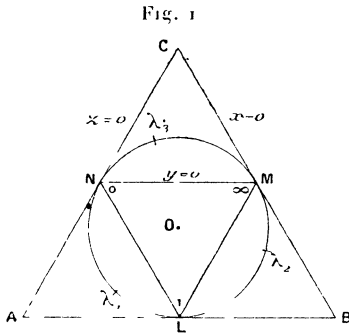
(Traduit avec l'autorisation de l'auteur par M. L. LAUGEL.)

La méthode d'après laquelle j'établis, dans les pages suivantes, la théorie de la réduction des formes quadratiques à deux indéterminées repose sur ce principe qui consiste à rechercher les formes *dégénérées*, c'est-à-dire les formes de déterminant évanouissant, puis de celles-ci à remonter aux formes *générales*, c'est-à-dire aux formes de déterminant non évanouissant. Ce principe se montre d'une grande fécondité; non seulement il conduit au but très aisément dans le cas ici traité des formes binaires à coefficients réels, mais il est encore applicable aussi

aux formes à nombre quelconque d'indéterminées, que les coefficients soient supposés réels ou bien complexes.

Pour faire ressortir clairement le point central de la recherche et pour arriver en même temps à l'intuition la plus évidente possible je donnerai aux considérations en question une forme géométrique particulière. Il n'y a, du reste, aucune difficulté à rendre plus générale la représentation géométrique (en admettant la généralisation projective) ou encore à remplacer la représentation géométrique par le traitement purement analytique.

1. Soient ABC un triangle équilatéral, K le cercle inscrit, auquel sont tangents les côtés du triangle aux points M, N, L (voir *fig. 1*). Ces points partagent la



circonférence du cercle en trois arcs égaux MN, NL, LM, que je nommerai les *arcs partiels* (Theilbogen).

Je choisis maintenant CNM comme triangle de référence et le point L comme point 1. Alors le point

$$x : y : z = 1 : \lambda : \lambda^2$$

décrit la circonférence de K lorsque le paramètre λ parcourt tous les nombres réels. Par suite de ce fait je désignerai chaque point de la circonférence par la valeur

correspondante du paramètre, en sorte que les points M, N, L par exemple prennent alors la désignation ∞ , 0, 1.

Désignons ensuite par T cette rotation du plan autour du point O, centre du cercle K, pour laquelle le point o se transforme en 1, 1 en ∞ , ∞ en 0, et T² cette rotation pour laquelle o se transforme en ∞ , ∞ en 1, 1 en 0.

Si λ_1 , λ_2 , λ_3 désignent des points situés d'une manière correspondante sur les trois arcs partiels NL, LM, MN, alors pour la rotation T, λ_1 se transforme en λ_2 , λ_2 en λ_3 et λ_3 en λ_1 . Comme le rapport anharmonique de quatre points sur la circonférence n'est pas altéré par la rotation T, l'on trouve aisément que

$$(2) \quad \lambda_2 = \frac{1}{1 - \lambda_1}, \quad \lambda_3 = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Dans ce qui suit, ce sont particulièrement les points à paramètre RATIONNEL qui jouent un rôle important, et ce sont à ces points que se rapportent les propositions et définitions qui suivent. Une corde $s = pq$ du cercle K sera dite une *corde élémentaire* lorsque $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\delta}{\gamma}$ sont des nombres rationnels entre lesquels a lieu l'équation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

En s'appuyant sur les équations (2) l'on démontre facilement qu'une corde élémentaire est transformée par la rotation T (et de même par la relation T²) en une corde élémentaire.

Maintenant le théorème suivant est d'une importance capitale :

I. *Les extrémités p et q d'une corde élémentaire s sont toujours situées sur le même arc partiel.*

Je démontrerai que, si l'on admet par hypothèse que p

et q sont situés sur des arcs partiels différents, on est alors conduit à des contradictions. Dans cette hypothèse il y a essentiellement trois cas à distinguer, cas qui correspondent aux trois combinaisons des arcs partiels pris deux à deux. On peut s'en tenir au cas où l'on suppose p situé sur l'arc MN, et par conséquent où le nombre $p \leq 0$ et où q est situé sur l'arc LM et par conséquent où le nombre $q \geq 1$. En effet, chacun des deux autres cas peut être ramené au précédent au moyen d'une des rotations T et T². Maintenant, lorsque $p \leq 0$, $q \geq 1$, l'on a, par suite, $1 \leq q - p \leq \infty$. Mais l'unique combinaison $p = 0$, $q = 1$, pour laquelle on ait $p - q = 1$, doit être exclue; en effet, pour cette combinaison p et q sont situés sur le même arc, ici l'arc LN. On ne peut pas davantage avoir $q - p = \infty$; c'est-à-dire qu'un des deux nombres p et q ne peut pas être égal à ∞ , car autrement p et q seraient tous deux situés sur l'arc ML, ou bien le seraient de même sur l'arc MN. Par suite $q - p = \pm \frac{1}{\alpha\gamma}$ est situé entre 1 et ∞ et par conséquent $\pm \alpha\gamma$ l'est entre 0 et 1. Mais ceci est absurde, puisque α et γ sont des nombres entiers.

Maintenant un triangle, inscrit dans le cercle K et dont les côtés sont des cordes élémentaires, je le nommerai un *triangle élémentaire*. D'après cette définition le triangle $o1\infty$ est un triangle élémentaire. *Toute corde élémentaire $s = pq$ est côté commun de deux triangles élémentaires.*

En effet soient $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\delta}{\gamma}$ et $r = \frac{\zeta}{\varepsilon}$ un troisième nombre rationnel quelconque. Alors, si l'on détermine x, y au moyen des équations

$$\zeta = x\beta + y\delta,$$

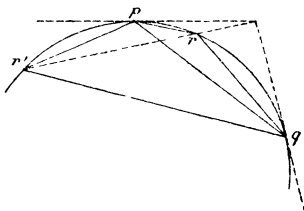
$$\varepsilon = x\alpha - y\gamma,$$

on reconnaît que p, q, r forment un triangle élémentaire lorsque l'on a, et seulement lorsque l'on a $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. La corde s est par conséquent côté commun des deux triangles élémentaires

$$p, q, r = \frac{\beta + \delta}{\alpha + \gamma} \quad \text{et} \quad p, q, r' = \frac{\beta - \delta}{\alpha - \gamma}.$$

Comme les points p, q sont séparés harmoniquement par les points r, r' le triangle pqr' peut être obtenu au moyen d'une construction très simple lorsque le triangle pqr est donné (fig. 2). De plus ce même fait nous

Fig. 2.



montre que les deux triangles élémentaires que l'on peut construire ayant une même corde élémentaire, $s = pq$, comme côté commun, sont situés de part et d'autre de cette corde.

En vertu du théorème I les sommets d'un triangle élémentaire qui n'est pas le triangle $o 1 \infty$ sont nécessairement situés sur le même arc partiel. Par conséquent le triangle $o 1 \infty$ ne peut avoir aucune portion de surface en commun avec un autre triangle élémentaire. On a, par conséquent, le théorème :

II. *Aucun point situé à l'intérieur du triangle $o 1 \infty$ ne peut être situé en même temps à l'intérieur d'un autre triangle élémentaire.*

2. Maintenant, à toute forme quadratique

$$(3) \quad f = au^2 + 2buv + cv^2$$

peuvent être adjoints ces points dont les coordonnées sont

$$(4) \quad x : y : z = a : b : c.$$

À une forme f correspond alors un point à l'intérieur, sur la circonférence, ou bien à l'extérieur du cercle K , selon que l'on a respectivement

$$(5) \quad D = b^2 - ac \begin{cases} < 0. \\ = 0. \\ > 0. \end{cases}$$

Réciproquement, à tout point $a : b : c$ correspond une infinité de formes f , notamment les formes

$$(6) \quad f = \rho(au^2 + 2buv + cv^2),$$

où ρ peut prendre chaque valeur réelle. Maintenant, pour rendre uniforme (eindeutig, univoque), la relation entre les points du plan et les formes f , je regarderai deux formes où les coefficients respectifs sont proportionnels entre eux, comme n'étant pas distinctes entre elles. On remarquera encore qu'au point λ de la circonférence du cercle K correspond la forme

$$(7) \quad f = \rho(u^2 + 2\lambda uv + \lambda^2 v^2) = \rho(u + \lambda v)^2.$$

Je considère encore une transformation linéaire quelconque à coefficients nombres entiers

$$(8) \quad \left. \begin{aligned} u &= \alpha u' + \beta v' \\ v &= \gamma u' + \delta v' \end{aligned} \right\} (S), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Par l'effet de cette transformation S , la forme (6) est transformée en

$$(9) \quad f' = \rho(\alpha' u'^2 + 2\beta' u'v' + \gamma' v'^2)$$

où

$$(10) \quad \begin{cases} a' = ax^2 + 2bx\gamma & + c\gamma^2, \\ b' = ax\beta + b(x\delta + \beta\gamma) & + c\gamma\delta, \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta & + c\delta^2. \end{cases}$$

A la transformation S correspond par conséquent une collinéation (transformation homographique) du plan, définie par les formules (10), que l'on peut également désigner par S .

Le cercle K se transforme en lui-même par l'effet de la collinéation S . En effet, au point λ de la circonférence de K correspond la forme (7) qui, par l'effet de la transformation (8), se change en

$$\varphi(x + \lambda\gamma)^2 \left(u' + \frac{\partial\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \alpha} v' \right)^2,$$

en sorte que le point λ , par l'effet de la collinéation S , est transformé en le point

$$(11) \quad \lambda' = \frac{\partial\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \alpha}.$$

Comme, d'après cela, les points 0 , ∞ , 1 , se transforment respectivement en

$$p = \frac{\beta}{\alpha}, \quad q = \frac{\delta}{\gamma}, \quad r = \frac{\delta + \beta}{\gamma + \alpha},$$

alors, aux points qui sont situés à l'intérieur du triangle 01∞ , correspondent les points à l'intérieur du triangle élémentaire pqr . Par conséquent, si l'on nomme une forme f de déterminant négatif *forme réduite* lorsque le point qui lui correspond est situé à l'intérieur du triangle 01∞ , l'on conclut du théorème II du n° 4 :

Une forme réduite peut seulement être de nouveau transformée en une forme réduite au moyen de la transformation S lorsque les points 0 , 1 , ∞ par l'effet de la

collinéation correspondante S [ou par l'effet de la transformation (11)], s'échangent seulement entre eux.

Évidemment alors, abstraction faite de la transformation identique, il existe deux pareilles transformations S : ce sont celles qui ont pour collinéations correspondantes les rotations T et T². On a donc le théorème :

Deux formes réduites, auxquelles correspondent les points P et Q, sont équivalentes lorsque, et seulement lorsque le point P est transformé en le point Q par l'une des rotations T et T².

Abstraction faite du centre O du cercle K, les points du triangle o1∞, et de même les formes réduites qui leur correspondent se groupent trois par trois par l'effet des rotations T et T², et cela de telle sorte que les trois formes d'un groupe sont équivalentes entre elles, tandis qu'au contraire tout couple de formes prises dans des groupes différents sont non équivalentes.

Si l'on établit les conditions pour que le point $a : b : c$ soit situé à l'intérieur du triangle o1∞, on reconnaît que la forme

$$f = au^2 + 2buw + cv^2$$

est réduite, lorsque les inégalités suivantes

$$b > 0, \quad a - b > 0, \quad c - b > 0$$

sont satisfaites (1).

Quant aux formes qui sont représentées par des

(1) La définition de la *forme réduite*, à laquelle a conduit ce traitement, coïncide donc avec celle donnée par Selling (*Journal de Crelle*, t. 77) [HURWITZ]. Traduit dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (LIOUVILLE, RESAL, JORDAN), 3^e série, t. III.

points sur les côtés du triangle $o1\infty$, celles-ci doivent dès lors être également comptées parmi les formes réduites. On démontre facilement que ces formes se distribuent en groupes six par six, de sorte que toute forme est équivalente aux formes d'un même groupe, mais non équivalente à aucune autre forme réduite.

3. Je terminerai ici la théorie de la réduction des formes quadratiques de déterminant négatif en démontrant que toute forme de déterminant négatif est équivalente à une forme réduite, ou, ce qui évidemment revient au même, que tout point quelconque P, pris à l'intérieur du cercle K, est situé sur un côté ou bien à l'intérieur d'un triangle élémentaire. Pour abrégér le langage, je dirai ici d'un point P *qu'il est situé sur le côté pq d'un triangle pqr*, lorsque les points P et r sont situés de part et d'autre de pq. Soit alors s_0 ce côté du triangle $\Delta_0 = o1\infty$ sur lequel est situé P. On construira sur s_0 le triangle élémentaire Δ_1 , différent de Δ_0 . Maintenant, si P est situé en dehors du triangle Δ_1 , soit s_1 ce côté de Δ_1 sur lequel est situé P. On construira alors sur s_1 le triangle élémentaire Δ_2 différent de Δ_1 , . . . , et ainsi de suite. Cette construction doit nécessairement prendre fin, c'est-à-dire que l'on doit nécessairement arriver finalement à un triangle élémentaire Δ_n , sur le contour ou à l'intérieur duquel est situé le point P. En effet, s'il en était autrement, aux extrémités des côtés s_0, s_1, \dots, s_n correspondrait une série illimitée de valeurs rationnelles $r_0, r'_0, r_1, r'_1, \dots, r_n, r'_n$ (le côté s_n étant ainsi la ligne de jonction $r_n r'_n$).

Maintenant soit, par exemple, $r_n = \frac{\beta}{\alpha}$, $r'_n = \frac{\delta}{\gamma}$; on aurait $r'_n - r_n = \pm \frac{1}{\alpha\gamma}$ et cette différence, pour n croissant, décroîtrait sans limites, puisque les dénominateurs

des nombres $r_0, r'_0, r_1, r'_1, \dots$ augmentent continuellement.

La longueur de la corde $s_n = r_n r'_n$, pour n croissant, décroîtrait par conséquent sans limites, ce qui est impossible, puisque le point P est toujours situé entre s_n et la circonférence de K, et à une distance finie de cette dernière.

4. J'ajouterai encore quelques observations aux considérations précédentes. Puisque chaque point situé sur le cercle K est situé à l'intérieur ou bien sur un côté d'un triangle élémentaire, et puisque aucun triangle élémentaire n'a de portion de surface en commun avec le triangle $o1\infty$, et que, par suite, de même deux triangles élémentaires ne peuvent non plus avoir de portion de surface en commun, nous en concluons ceci :

Les triangles élémentaires remplissent exactement, par leur ensemble, tout l'intérieur du cercle K, qu'ils recouvrent d'une manière simple, sans lacunes.

Si l'on conçoit effectuée la construction de tous les triangles élémentaires, on s'imaginera la même figure que M. Klein a établie à l'occasion de la subdivision connue du plan des grandeurs complexes, basée sur la théorie des fonctions modulaires ⁽¹⁾. Et réciproquement, des résultats que nous avons développés ci-dessus l'on peut déduire les propriétés essentielles de cette subdivision du plan des grandeurs complexes.

Quant à la réduction des formes de déterminant positif, elle peut, grâce à une idée due à M. Hermite,

⁽¹⁾ KLEIN-FRICKE, *Leçons sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques*, t. I, p. 239-247; Teubner, 1890.

se ramener à celle des formes de déterminant négatif.

On y arrive au moyen de cette définition :

« Une forme de déterminant positif est dite *réduite* lorsque la polaire du point correspondant à la forme traverse l'intérieur du triangle 01∞ . »

En partant de cette définition l'on peut alors, sujet que je ne poursuivrai pas ici davantage, développer complètement la théorie des formes de déterminant positif (équation de Pell, etc.). On voit ici aussi ressortir comme principe de base l'importance des suites de Farey, dont la considération a été primitivement pour moi le point de départ de toute cette recherche.