NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RICHARD

Solution de la question proposée au concours général de mathématiques spéciales en 1897

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 476-482
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__476_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES EN 1897;

PAR M. RICHARD,
Professeur au lycée de Tours.

Soit oabc un tétraèdre T *trirectangle au sommet o et dont les arêtes oa, ob, oc ont la même longueur l, et d le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre. On suppose que le tétraèdre* T *se déplace par rapport à un trièdre trirectangle fixe* OX, OY, OZ, *de manière* *que les points* A, B, C, D *décrivent respectivement des plans qui ont pour équations* $Y + Z = 0$, $Z + X = 0$, $X + Y = 0$, $X + Y + Z + \frac{l}{2} = 0$.

1° *Démontrer que les points symétriques de* A, B, C, D, *par rapport aux arêtes du tétraèdre, décrivent également des plans.*

2° *Trouver l'équation de la surface* S, *décrite par le sommet* o *du tétraèdre* T. S *est du quatrième ordre avec un point triple et trois droites doubles.*

3° *Par chaque point* α *d'une droite double passent deux droites* δ *et* δ' *qui rencontrent la surface* S *en quatre points confondus. Pour quelles positions de* α, δ *et* δ' *coïncident-elles?*

4° *Tout plan tangent à la surface* S *coupe* S *suivant deux coniques. Ces deux coniques se confondent pour quatre positions particulières du plan tangent.*

X, Y, Z, x, y, z étant les coordonnées d'un même point M par rapport au trièdre fixe et au trièdre mobile, on a les formules de transformation de coordonnées

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= x_0 + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \quad Y = y_0 + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ Z &= z_0 + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'. \end{aligned} \right.$$

On obtiendra les coordonnées du point A, par exemple, en faisant $x' = l$, $y' = z' = 0$. On aura donc, pour ces coordonnées,

$$X_a = x_0 + \alpha l, \qquad Y_a = y_0 + \beta l, \qquad Z_a = z_0 + \gamma l.$$

En exprimant que ce point est dans le plan $Y + Z = 0$, on aura l'équation

$$(2)\qquad y_0 + z_0 + (\beta + \gamma) l = 0;$$

de même, puisque le point B est dans le plan $Z + X = 0$,

$$(3)\qquad z_0 + x_0 + [\gamma' + \alpha'] l = 0,$$

et, puisque le point C est dans le plan $X + Y = o$,

$$x_0 + y_0 + (\alpha'' + \beta'')l = o. \tag{4}$$

Enfin, le point D $\left(x' = \frac{l}{2}, y' = \frac{l}{2}, z' = \frac{l}{2}\right)$ étant dans le plan $X + Y + Z + \frac{l}{2} = o$, on a la relation

$$\left\{\begin{aligned} & x_0 + y_0 + z_0 \\ & \quad + [\alpha - \alpha' + \alpha'' + \beta + \beta' + \beta'' + \gamma + \gamma' - \gamma'' + 1]\frac{l}{2} = o. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Entre (2), (3), (4), (5), éliminons x_0, y_0, z_0; on trouve, par un calcul facile, la relation

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = o. \tag{6}$$

Les formules d'Olinde Rodrigues donnent les neuf cosinus en fonction de trois paramètres λ, μ, ν, ou mieux en fonction de quatre paramètres homogènes λ, μ, ν, ρ; en posant pour abréger $\Delta = \rho^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$, on a

$$\left\{\begin{aligned} & \alpha = \frac{\rho^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{\Delta}, && \alpha' = \frac{2[\lambda\mu - \nu\rho]}{\Delta}, && \alpha'' = \frac{2[\lambda\nu + \mu\rho]}{\Delta}, \\ & \beta = \frac{2[\lambda\mu + \nu\rho]}{\Delta}, && \beta' = \frac{\rho^2 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2}{\Delta}, && \beta'' = \frac{2[\mu\nu - \lambda\rho]}{\Delta}, \\ & \gamma = \frac{2[\lambda\nu - \mu\rho]}{\Delta}, && \gamma' = \frac{2[\mu\nu + \lambda\rho]}{\Delta}, && \gamma'' = \frac{\rho^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{\Delta}; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

en ayant égard à ces formules, la relation (6) devient $\rho^2 = o$; ainsi ρ est nul. Dès lors, les formules (7) se simplifient.

Résolvons maintenant les équations (2), (3), (4) par rapport à x_0, y_0, z_0, puis remplaçons-y les cosinus par leurs valeurs tirées de (7); on trouve, par un calcul facile,

$$x_0 = -\frac{2\mu\nu l}{\Delta}, \qquad y_0 = -\frac{2\nu\lambda l}{\Delta}, \qquad z_0 = -\frac{2\lambda\mu l}{\Delta}, \tag{8}$$

où $\Delta = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$.

Alors les formules (1), où l'on aura remplacé x_0, y_0, z_0 et les neuf cosinus par leurs valeurs, donneront les coordonnées par rapport aux axes fixes d'un point de la surface décrite par un point quelconque de la figure mobile.

Le symétrique de A, par exemple, a pour coordonnées $x' = -l$, $y' = 0$, $z' = 0$; on a donc pour ce point

$$\begin{aligned}
\Delta X &= -2\mu\nu l - (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) l,\\
\Delta Y &= -2\nu\lambda l - 2\lambda\mu l,\\
\Delta Z &= -2\lambda\mu l - 2\nu\lambda l;
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit facilement $Y - Z = 0$. C'est l'équation d'un plan que décrit ce point.

De même, les symétriques de B et C décrivent respectivement les plans $Z - X = 0$, $X - Y = 0$.

Le symétrique de D, par rapport à Oz', a pour coordonnées $x' = -\frac{l}{2}$, $y' = -\frac{l}{2}$, $z' = \frac{l}{2}$, de sorte que ses coordonnées par rapport aux axes fixes sont données par les formules

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta X}{l} &= -2\mu\nu - \frac{\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{2} - \lambda\mu + \lambda\nu,\\
\frac{\Delta Y}{l} &= -2\nu\lambda - \mu\lambda - \frac{\mu^2 - \lambda^2 - \nu^2}{2} + \mu\nu,\\
\frac{\Delta Z}{l} &= -2\lambda\mu - \lambda\nu - \mu\nu + \frac{\nu^2 - \lambda^2 - \mu^2}{2};
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta}{2}(X + Y - Z) = \frac{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{2} = \frac{\Delta}{2},$$

et par suite, ce point décrit le plan

$$X + Y - Z = 0;$$

de même les deux autres symétriques de D décrivent les plans

$$Y + Z - X = 0, \qquad Z + X - Y = 0.$$

2° D'après les formules (8), on a, pour les coordonnées du sommet du tétraèdre T,

$$x = -\frac{2\mu\nu l}{\Delta}, \qquad y = -\frac{2\nu\lambda l}{\Delta}, \qquad z = -\frac{2\lambda\mu l}{\Delta},$$

pour trouver l'équation du lieu de ce point, remarquons que

$$\frac{yz}{x} = -\frac{2\lambda^2 l}{\Delta}, \qquad \frac{zx}{y} = -\frac{2\mu^2 l}{\Delta}, \qquad \frac{xy}{z} = -\frac{2\nu^2 l}{\Delta};$$

ajoutons et remplaçons $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ par Δ; on a

$$+\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{yx}{z} = -2l$$

ou bien

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + 2lxyz = 0.$$

C'est l'équation de la surface cherchée.

On voit immédiatement que l'origine est un point triple, et les axes de coordonnées des lignes doubles.

3° Une droite passant par un point de l'un des axes, par exemple de OX, a pour équations

$$x = \alpha + \lambda u, \qquad y = \lambda v, \qquad z = \lambda w.$$

Substituant dans l'équation de la surface et divisant par λ^2, on a

$$(\alpha + \lambda u)^2(v^2 + w^2) + v^2w^2\lambda^2 + 2l(\alpha + \lambda u)vw = 0;$$

pour que cette équation ait encore la racine double $\lambda = 0$, il faut et il suffit que le coefficient de λ et le terme indépendant soient nuls; ceci donne

$$\alpha(v^2 + w^2) + 2lvw = 0,$$
$$u[\alpha(v^2 + w^2) + lvw] = 0:$$

ces deux équations donnent $u = 0$, et l'équation en $\frac{v}{w}$

$$\alpha\frac{v^2}{w^2} + 2l\frac{v}{w} - \alpha = 0;$$

on a donc bien deux solutions à la question. Les deux droites obtenues sont confondues, si $\alpha = \pm l$.

4° Un plan quelconque coupe la surface suivant une quartique ayant trois points doubles (un sur chaque axe). Si ce plan est tangent, il y a en outre un point double au point de contact. La courbe ayant plus de trois points doubles se décompose; elle ne se décompose pas en une droite et une cubique, car trois des points doubles seraient en ligne droite; elle se décompose donc bien en deux coniques.

Considérons le point du plan dont les coordonnées trilinéaires sont λ, μ, ν : à chaque point du plan correspond le point de la surface dont les coordonnées sont

$$x = -\frac{2\mu\nu l}{\Delta}, \qquad y = -\frac{2\nu\lambda l}{\Delta}, \qquad z = -\frac{2\lambda\mu l}{\Delta};$$

un plan $Ax + By + Cz + D = 0$ coupe la surface suivant la quartique qui a pour correspondante la courbe plane

$$2A\mu\nu l + 2B\nu\lambda l + 2C\lambda\mu l - D\Delta = 0,$$

où $\Delta = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$.

Cette conique se décompose en deux droites si le plan est tangent. Ceci fournit sans peine l'équation tangentielle de la surface.

Si

$$A = B = C = \frac{-D}{l},$$

on voit que le premier membre de l'équation de la conique est le carré de $\lambda + \mu + \nu$; on verra de même que si $A = -B = -C = -\frac{D}{l}$ ou si $-A = B = -C = -\frac{D}{l}$ ou si $-A = -B = C = -\frac{D}{l}$, le plan coupe la surface suivant des coniques confondues ayant pour représentations planes les droites $\lambda + \nu - \mu = 0$, $\nu - \lambda + \mu = 0$,

$\mu + \lambda - \nu = 0$; ce qui achève de démontrer la dernière partie de l'énoncé.

Voir, au sujet de ce problème, une Note de M. Darboux, à la fin de la *Cinématique* de M. Kœnigs.