NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. FONTENÉ

# Sur la correspondance biforme ; extension des polygones de Poncelet

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 16 (1897), p. 437-463

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__437_0>

[M2e]

# SUR LA CORRESPONDANCE BIFORME; EXTENSION DES POLYGONES DE PONCELET;

PAR M. G. FONTENÉ,
Professeur au Collège Rollin.

## § I.

1. *Résultante de deux correspondances biformes; cas de décomposition.* — Soient deux variables $x$ et $y$ liées par une relation doublement quadratique

$$F(x, y) = 0:$$

elles ont une correspondance biforme. Il existe quatre valeurs critiques de $x$, c'est-à-dire quatre valeurs de $x$ donnant pour $y$ deux valeurs égales; il existe de même quatre valeurs critiques de $y$. *Les valeurs critiques de $x$ et celles de $y$ ne sont pas indépendantes;* car, si on les représente par des points-racines $a$, $b$, $c$, $d$ et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, les rapports anharmoniques $(a, b, c, d)$ et $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont égaux. En effet, si l'on prend des coordonnées cartésiennes, l'équation $F(x, y) = 0$ représente une quartique binodale, et le fait en question résulte alors d'un calcul connu (SALMON, *Courbes planes,* n° 270; on peut encore consulter : HALPHEN, *Fonctions elliptiques,* IIe Partie, p. 338); *les deux systèmes de valeurs critiques sont équi-anharmoniques.* La relation $F = 0$, qui dépend de huit paramètres, est déterminée par ses éléments critiques et par une dernière donnée.

2. Cela posé, nous démontrerons ce théorème :

*Deux correspondances biformes* $F(x, y) = 0$,

$F'(y, z) = 0$ *donnent entre* $x$ *et* $z$ *une correspondance qui se décompose en deux correspondances biformes* $F''(x, z) = 0$, $F'''(x, z) = 0$, *lorsque les quatre valeurs critiques de* $y$ *sont les mêmes dans les deux correspondances données. Les valeurs de* $x$ *qui sont critiques pour* $y$ *dans* $F = 0$ *sont aussi les valeurs de* $x$ *critiques pour* $z$ *dans* $F'' = 0$ *et dans* $F''' = 0$; *les valeurs de* $z$ *qui sont critiques pour* $y$ *dans* $F' = 0$ *sont aussi les valeurs de* $z$ *critiques pour* $x$ *dans* $F'' = 0$ *et dans* $F''' = 0$.

Soient les deux correspondances biformes

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0, \qquad A'z^2 + 2B'z + C' = 0,$$

$A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$ étant des polynomes du second degré en $y$; d'après l'hypothèse on peut supposer

$$B^2 - AC = B'^2 - A'C' = \Delta,$$

et l'on a

$$(Ax + B)^2 - \Delta = 0, \qquad (A'z + B')^2 - \Delta = 0;$$

on en déduit, pour une même valeur de $y$,

$$Ax + B \pm (A'z + B') = 0,$$

et l'on achève facilement. On remarquera que, si l'on prend, par exemple, le système $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$, à des valeurs de $x$ et de $y$ qui vérifient $F = 0$ correspond une seule valeur de $z$. (En coordonnées cartésiennes dans l'espace, $F = 0$ et $F' = 0$ représentent les projections d'une courbe gauche qui a quatre points doubles à distance finie et qui se décompose en deux courbes gauches.)

3. On a ce corollaire :

*Trois quantités* $x, y, z$ *étant liées par les relations doublement quadratiques* $F(x, y) = 0$, $f(y, z) = 0$,

$\varphi(z, x) = 0$, *pour que ces trois relations admettent une infinité de solutions, il faut d'abord que les valeurs de chaque variable qui sont critiques pour l'une des deux autres variables le soient pour la troisième, ce qui fait* 11 *conditions et non* 12; *il faut de plus une autre condition. Si l'on se donne $x$, on a à choisir entre deux valeurs pour $y$, et ce choix détermine $z$ avec une valeur unique.*

La démonstration est facile : la réduction de 12 conditions apparentes à 11 conditions effectives tient à l'égalité de rapports anharmoniques dont il a été parlé; quand on a pris $F = 0$, $f = 0$, avec mêmes $y$ critiques, la relation $\varphi = 0$ est déterminée : c'est l'une des deux relations résultantes des deux premières.

4. Nous ajouterons ceci :

*Les* N *quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N$ étant liées par les* N *relations doublement quadratiques*

$$\varphi_{1,2}(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \varphi_{2,3}(\rho_2, \rho_3) = 0, \quad \ldots \quad \varphi_{N,1}(\rho_N, \rho_1) = 0.$$

*si les valeurs de $\rho_i$ qui sont critiques pour $\rho_{i-1}$ le sont aussi pour $\rho_{i+1}$, l'indice $i$ prenant les valeurs* 2, 3, ..., N, 1 (*avec les conventions $\rho_{N+1} = \rho_1$, $\rho_0 = \rho_N$*), *il faut encore une condition pour que ces relations admettent une infinité de solutions; le nombre total des conditions supposées est* 4N. *Deux quelconques des* N *quantités $\rho_i$ et $\rho_j$, sont liées par une relation doublement quadratique; la quantité $\rho_i$ a quatre valeurs critiques pour $\rho_j$, les mêmes quel que soit $j$. Si l'on se donne $\rho_1$, on a à choisir entre deux valeurs pour $\rho_2$, et ce choix détermine complètement les autres $\rho$. Quand on a pris les* N — 1 *premières relations $\varphi = 0$, sous les conditions indiquées, la dernière rela-*

*tion* $\varphi = 0$ *est déterminée : c'est l'une des relations résultantes des* $n-1$ *premières. Pour* $N > 3$ *les conditions ne sont pas données comme des conditions nécessaires pour qu'il y ait une infinité de solutions. On remarquera encore que, pour* $N > 3$, *trois quelconques des quantités* $\rho$ *ont deux à deux une correspondance biforme.*

5. Voici une interprétation géométrique de la correspondance biforme. Les points A d'une conique S, et ses tangentes $a$, sont données en fonction d'un paramètre $\rho$ par les formules

$$\frac{x}{X(\rho)} = \frac{y}{Y(\rho)} = \frac{z}{Z(\rho)}, \qquad \frac{u}{U(\rho)} = \frac{v}{V(\rho)} = \frac{w}{W(\rho)},$$

les polynomes X, ... étant du second degré. Si l'on prend deux coniques $S_1$ et $S_2$, et si l'on assujettit un point de l'une et un point de l'autre à cette condition que le point $A_2$ de la seconde soit sur la droite transformée du point $A_1$ de la première dans une corrélation générale, auquel cas le point $A_1$ est sur la droite primitive du point $A_2$, on aura

$$\begin{aligned}
&x_2(Ax_1 + By_1 + Cz_1)\\
&\quad + y_2(A'x_1 + B'y_1 + C'z_1) + z_2(A''x_1 + B''y_1 + C''z_1) = 0,\\
&x_1(Ax_2 + A'y_2 + A''z_2)\\
&\quad + y_1(Bx_2 + B'y_2 + B''z_2) + z_1(Cx_2 + C'y_2 + C''z_2) = 0;
\end{aligned}$$

les paramètres $\rho_1$ et $\rho_2$ seront liés par une relation doublement quadratique, dépendant de 8 paramètres, et par suite générale. On pourrait considérer les tangentes $a$ au lieu des points A.

6. *Cas particulier.* — Lorsque la relation doublement quadratique $F(x, y) = 0$ est symétrique par rapport à $x$ et $y$ (3 conditions), les valeurs critiques de $x$

et celles de $y$ sont égales (3 conditions, et non 4); la réciproque est vraie, comme on peut le voir au moyen du théorème énoncé dans l'Ouvrage d'Halphen, p. 338. Le théorème du n° 2 s'énonce alors comme il suit :

*Deux correspondances biformes symétriques*

$$F(x, y) = 0, \qquad F'(y, z) = 0,$$

*donnent entre $x$ et $z$ une correspondance qui se décompose en deux correspondances biformes*

$$F''(x, z) = 0, \qquad F'''(x, z) = 0,$$

*lorsqu'elles ont les mêmes valeurs critiques. Chacune des correspondances obtenues admet ces mêmes valeurs critiques, d'où il suit que ces nouvelles correspondances sont également symétriques.*

## § II.

7. Nous considérerons un cas plus particulier, qui est l'objet principal de ce Mémoire. L'équation

$$A \cos x + B \sin x - C = 0$$

a deux solutions quand on cherche simplement les lignes trigonométriques de l'angle $x$ : elles sont confondues si l'on a $A^2 + B^2 - C^2 = 0$; en posant $\tang \frac{x}{2} = \rho$, on aurait $(A + C)\rho^2 - 2B\rho + (A - C) = 0$. Cela posé, considérons la relation

$$A \cos a \cos a' + B \sin a \sin a' - C = 0 \qquad \text{ou} \qquad \psi(a, a') = 0,$$

$A^2$, $B^2$, $C^2$ *étant inégaux deux à deux*; nous dirons que les quatre solutions

$$(a, a'), \quad (-a, -a'), \quad (\pi - a, \pi - a'), \quad (\pi + a, \pi + a')$$

forment une solution composée. Avec

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \rho, \qquad \operatorname{tang}\frac{a'}{2} = \rho',$$

on aurait entre $\rho$ et $\rho'$ une correspondance biforme symétrique et l'on verrait que, dans l'hypothèse

$$(A^2 - B^2)(A^2 - C^2)(B^2 - C^2) = 0,$$

elle se décompose en deux correspondances uniformes, ce que nous voulons éviter.

Les *angles critiques* sont les valeurs de $a$ (ou $a'$) qui donnent pour $a'$ (ou $a$) deux valeurs égales : ils sont donnés par la relation

$$A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi - C^2 = 0, \qquad \frac{\cos^2\varphi}{B^2 - C^2} = \frac{\sin^2\varphi}{C^2 - A^2} = \frac{1}{B^2 - A^2},$$

de sorte que les quatre angles critiques sont $\varphi$, $-\varphi$, $\pi - \varphi$, $\pi + \varphi$, donnant lieu à quatre angles associés $\theta$, $-\theta$, $\pi - \theta$, $\pi + \theta$; la relation entre $a$ et $a'$ peut s'écrire

$$\frac{\cos\theta}{\cos\varphi}\cos a\cos a' + \frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\sin a\sin a' - 1 = 0.$$

8. On a ce théorème :

*Trois angles $a$, $a'$, $a''$ étant liés par les deux relations $\psi''(a, a') = 0$, $\psi(a', a'') = 0$, pour que la relation entre $a$ et $a''$ se décompose en deux relations de la forme $\psi'(a, a'') = 0$, il faut et il suffit que les deux premières relations aient les mêmes angles critiques; chacune des deux relations obtenues a aussi ces angles critiques.*

Voici une démonstration directe qui fait connaître les deux relations nouvelles. D'abord l'élimination de $a'$ donne

$$(A^2\cos^2 a'' + B^2\sin^2 a'' - C^2)(A''^2\cos^2 a - B''^2\sin^2 a - C''^2) \\ - (AA''\cos a\cos a'' + \ldots)^2 = 0:$$

cette relation devant être symétrique en $a$ et $a''$, les deux premiers facteurs doivent s'annuler ensemble et la condition est nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on écrit les relations $\psi'' = 0$, $\psi = 0$, avec $\varphi$ et $\theta''$, $\varphi$ et $\theta$, et l'une des relations cherchées $\psi' = 0$, avec $\varphi$ et $\theta'$. Pour déterminer $\theta'$, on fait $\alpha' = \varphi$, d'où $\alpha'' = \theta$, $\alpha = \theta''$, et la relation $\psi' = 0$ donne

$$\frac{\cos\theta\cos\theta'\cos\theta''}{\cos\varphi} + \frac{\sin\theta\sin\theta'\sin\theta''}{\sin\varphi} - 1 = 0,$$

avec deux valeurs pour $\theta'$; on constate alors que l'élimination de $a'$ entre les deux relations données, et l'élimination de $\theta'$ entre la relation $\psi' = 0$ et la relation ci-dessus, donnent le même résultat. On se rend bien compte de la démonstration en considérant les relations des six angles $a$, $a'$, $a''$, $\theta$, $\theta'$, $\theta''$.

9. On a ce corollaire :

*Trois angles $a$, $a'$, $a''$ étant liés par les relations*

$$\psi''(a.\,a') = 0, \qquad \psi(a', a'') = 0, \qquad \psi'(a'', a) = 0,$$

*pour que ces trois relations admettent une infinité de solutions, il faut d'abord qu'elles aient les mêmes angles critiques; cette condition remplie, il faut encore une condition. Si les trois relations sont prises sous la forme*

$$A''\cos a\cos a' + B''\sin a\sin a' - C'' = 0,$$

*on a les trois conditions obtenues en égalant à zéro les déterminants du troisième ordre formés en prenant trois lignes du Tableau rectangulaire*

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \\ A'^2 & B'^2 & C'^2 \\ A''^2 & B''^2 & C''^2 \\ AA'A'' & BB'B'' & CC'C'' \end{array}\right|.$$

10. Nous ajouterons ceci :

*Lorsque* N *angles* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *sont liés par les* N *relations*

$$\psi_{1,2}(a_1, a_2) = 0, \quad \psi_{2,3}(a_2, a_3) = 0, \quad \ldots, \quad \psi_{N,1}(a_N, a_1) = 0,$$

*qui ont les mêmes angles critiques, il faut une condition pour que ces relations admettent une infinité de solutions. Deux quelconques des* N *angles sont liés par une relation analogue, avec les mêmes angles critiques.*

11. Soient deux coniques $S_1$, $S_2$ que nous rapporterons au triangle conjugué commun, et $S_{12}$ une conique conjuguée au même triangle; si l'on a sur $S_1$ et $S_2$ les points $A_1$ et $A_2$ conjugués par rapport à $S_{12}$, les tangentes $a_1$ et $a_2$ sont conjuguées par rapport à une conique $\Sigma_{12}$, et les deux coniques de conjugaison sont polaires réciproques par rapport aux mêmes coniques que les deux coniques données; les points critiques $A_1$ sont ceux dont la polaire par rapport à $S_{12}$ touche $S_2$, les tangentes critiques $a_1$ sont celles dont le pôle par rapport à $\Sigma_{12}$ est sur $S_2$. Les points des coniques $S_1$, $S_2$ étant donnés par les formules

$$x_1 = a_1 \cos\alpha_1, \quad y_1 = b_1 \sin\alpha_1, \quad z_1 = c_1,$$
$$x_2 = a_2 \cos\alpha_2, \quad y_2 = b_2 \sin\alpha_2, \quad z_2 = c_2,$$

et la conique $S_{12}$ ayant pour équation

$$Ax^2 + By^2 - Cz^2 = 0,$$

la relation de conjugaison entre $A_1$ et $A_2$ est

$$Aa_1a_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + Bb_1b_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - Cc_1c_2 = 0.$$

12. On a ce théorème :

*Étant données trois coniques* $S_1$, $S_2$, $S_3$ *conjuguées* *à un même triangle* $OO'O''$, *et deux coniques de conjugaison* $S_{12}$, $S_{23}$ *également conjuguées à ce triangle, la correspondance entre* $A_1$ *et* $A_3$ *se décompose en deux correspondances biformes si les éléments* $A_2$ *critiques pour* $A_1$ *le sont aussi pour* $A_3$, *et chacune des correspondances entre* $A_1$ *et* $A_3$ *est donnée par une conique de conjugaison* $S_{13}$ *conjuguée au même triangle* $OO'O''$.

13. On a ce corollaire :

*Étant données trois coniques* $S_1$, $S_2$, $S_3$ *conjuguées à un même triangle* $OO'O''$, *et trois coniques de conjugaison* $S_{12}$, $S_{23}$, $S_{31}$, *conjuguées à ce même triangle, pour qu'un triangle mobile* $A_1 A_2 A_3$ *puisse avoir ses sommets situés respectivement sur les trois premières coniques, deux sommets quelconques étant conjugués par rapport à la conique intermédiaire, il est nécessaire qu'un point de* $S_2$, *critique pour* $S_1$, *le soit aussi pour* $S_3$, *et qu'un point de* $S_3$, *critique pour* $S_2$, *le soit aussi pour* $S_1$, *auquel cas un point de* $S_1$ *critique pour* $S_3$ *l'est pour* $S_2$ ; *ces conditions remplies, il faut encore une condition. Les tangentes* $a_1$, $a_2$, *par exemple, sont conjuguées par rapport à une conique fixe* $\Sigma_{12}$ *conjuguée au triangle* $OO'O''$. *Si l'on se donne l'élément* $(A_1, a_1)$, *on a à choisir entre deux positions possibles pour* $(A_2, a_2)$, *et ce choix détermine complètement* $(A_3, a_3)$. *Les deux coniques* $S_{12}$, $S_{23}$ *étant choisies de façon que* $A_2$ *critique pour* $A_1$ *le soit pour* $A_3$, *la conique* $S_{31}$ *est déterminée avec deux solutions.*

14. Nous ajouterons ceci :

*Étant donnée une chaîne de* N *coniques* $S_1$, $S_2$, ..., $S_N$ *conjuguées à un même triangle* $OO'O''$, *et* N *coniques* *de conjugaison* $S_{12}, S_{23}, \ldots, S_N$, *conjuguées à ce même triangle, si les points de la conique* $S_i$ *qui sont critiques pour* $S_{i-1}$ *le sont aussi pour* $S_{i+1}$, *l'indice i prenant les* $N - 1$ *valeurs* 2, 3, ..., N (*auquel cas un point de* $S_1$ *critique pour* $S_N$ *l'est aussi pour* $S_2$), *il faut une condition pour qu'il existe un contour polygonal mobile* $A_1 A_2 \ldots A_N$, *dont les sommets soient situés respectivement sur les coniques* $S_2$, *et dont les sommets consécutifs* $A_i$, $A_{i+1}$ *soient conjugués par rapport à la conique intermédiaire* $S_{i,i+1}$. *Le nombre total des conditions est* N. *Deux sommets quelconques* $A_i$, $A_j$ *sont conjugués par rapport à une conique fixe* $S_{ij}$ *conjuguée par rapport au triangle* $OO'O''$; *en même temps, les tangentes* $a_i$, $a_j$ *sont conjuguées par rapport à une conique fixe* $\Sigma_{i,j}$. *Si l'on se donne l'élément* $(A_1, a_1)$, *on a à choisir entre deux positions possibles pour* $(A_2, a_2)$, *et ce choix détermine complètement le contour. Les* $N - 1$ *premières coniques de conjugaison déterminent la dernière.*

## § III.

15. *Correspondance unie sur deux coniques.* — Plus particulièrement, la conique de conjugaison ponctuelle $S_{12}$ peut passer par les quatre points communs aux deux coniques, $S_1$, $S_2$, auquel cas la conique de conjugaison tangentielle $\Sigma_{12}$ touche les quatre tangentes communes à ces deux coniques; alors les quatre points communs sont des points unis de la correspondance, c'est-à-dire qu'un point commun se correspond à lui-même, et de même les quatre tangentes communes sont des tangentes unies. Réciproquement, si la correspondance entre les éléments $(A_1, a_1)(A_2, a_2)$ admet comme points unis les quatre points communs aux deux coniques $S_1$, $S_2$, et comme tangentes unies les tangentes communes à

ces deux coniques (sept conditions, et non huit), cette correspondance consiste en ce que les points $A_1$ et $A_2$ sont conjugués par rapport à une conique $S_{12}$ passant par les quatre points communs à $S_1$ et $S_2$, ou en ce que les tangentes $a_1$ et $a_2$, .... Nous donnerons à cette correspondance le nom de *correspondance unie*.

16. Nous dirons qu'il y a correspondance tangentielle entre un point $A_1$ d'une conique $S_1$ et une tangente $a_2$ à la conique $S_2$ lorsque le point $A_1$ doit se trouver sur la tangente $a_2$, ou encore lorsque la tangente $a_2$ doit passer au point $A_1$ : cette correspondance tangentielle est une correspondance biforme; les éléments critiques de $S_2$ sont donnés par les tangentes communes aux deux coniques, ceux de $S_1$ sont donnés par les points communs. La correspondance tangentielle est une correspondance unie. La conique de conjugaison $S_{12}$ est la conique $S_2$, la conique $\Sigma_{12}$ est $S_1$.

La correspondance unie se ramène à la correspondance tangentielle :

1° Considérons trois coniques $S'_1, S_2, S'_3$ *inscrites à un même quadrilatère;* une tangente $b$ à la conique intermédiaire rencontre $S'_1$ en deux points $\pm A'$ et $S'_3$ en $\pm C'$ : il y a correspondance biforme entre $b$ et $A'$, entre $b$ et $C'$, et la correspondance entre $A'$ et $C'$ se décompose en deux correspondances biformes dont l'une associe les points de même signe, l'autre associant les points de signes contraires. Nous supposerons qu'on a choisi l'une des deux correspondances, de sorte que $A'$ et $b$ déterminent complètement $C'$; le passage du couple $+A'$, $+C'$ au couple $-A'$, $-C'$ se fait par une tangente commune, d'où la nécessité de ces tangentes communes pour la décomposition de la correspondance $(A', C')$ en deux correspondances biformes.

Cette correspondance entre les éléments $(A', a')$ et $(C', c')$ est une correspondance unie.

2° Pour trois coniques $S'_1$, $S''_2$, $S'_3$ *circonscrites à un même quadrangle* (système de quatre points), on a des faits corrélatifs en partant d'un point $B''$ de la conique intermédiaire.

3° Réciproquement, *si les éléments* $(A', a')$ *et* $(C', c')$ *de deux coniques* $S'_1$, $S'_3$ *ont une correspondance unie, c'est-à-dire une correspondance biforme dans laquelle les points communs sont unis, et les tangentes communes sont unies (sept conditions), l'enveloppe de la droite* $A'C'$ *ou* $b$ *est une conique* $S_2$ *touchant les quatre tangentes communes aux deux premières, et le lieu du point* $(a', c')$ *ou* $B''$ *est une conique* $S''_2$ *passant par les quatre points communs aux deux premières;* les deux coniques $S_2$ et $S''_2$ sont polaires réciproques par rapport aux mêmes coniques que les deux coniques données. Nous rappellerons que les points $A'$ et $C'$ sont conjugués par rapport à une conique $S'_{13}$ passant aux points communs à $S'_1$ et $S'_3$, et que l'on a un fait corrélatif, les deux coniques de conjugaison $S'_{13}$ et $\Sigma'_{13}$ étant polaires réciproques par rapport aux mêmes coniques que $S'_1$ et $S'_3$; la conique enveloppe $S_2$ touche les tangentes à $S'_{13}$ aux points communs à $S'_1$ et $S'_3$, la conique lieu $S''_2$ passe aux points de contact avec $\Sigma'_{13}$ des tangentes communes à $S'_1$ et $S'_3$.

**17.** Voici une démonstration directe des faits 1° et 2°. Nous indiquerons d'abord une identité : étant données la forme quadratique $f(x, y, z)$ et la forme adjointe $F(u, v, w)$, on a

$$F[(yz' - ry'), (zx' - xz'), (xy' - yx')] = \begin{vmatrix} f(x, x) & f(x, x') \\ f(x', x) & f(x', x') \end{vmatrix},$$

$f(x, x')$ étant $a_{11}xx' + \ldots + a_{12}(xy' + yx') + \ldots$; si le point M est sur la conique $f = 0$, on a pour F un carré parfait

$$F[(yz' - zy'), \ldots] = -f^2(x, x').$$

Considérons alors les trois coniques $S'_1, S_2, S'_3$ inscrites à un même quadrilatère; leurs équations tangentielles sont

$$F_1(u, v, w) = 0, \qquad F_1 - k^2 F_3 = 0, \qquad F_3(u, v, w) = 0;$$

en écrivant qu'un point $A'$ de $S'_1$, et un point $C'$ de $S'_3$ sont sur une tangente $b$ à $S_2$, on a

$$F_1[(y_1 z_3 - z_1 y_3), \ldots] - k^2 F_3[(y_1 z_3 - z_1 y_3), \ldots] = 0,$$

ou

$$f_1^2(x_1, x_3) - k^2 f_3^2(x_1, x_3) = 0,$$

ou

$$f_1(x_1, x_3) \pm k f_3(x_1, x_3) = 0.$$

18. *Contours mobiles.* — Reprenons le théorème du n° 14, avec une chaîne de $2n$ coniques $S'_1, S_2, S'_3, S_4, \ldots, S_{2n}$, conjuguées à un même triangle $OO'O''$, et supposons que chaque conique d'indice pair est conique de conjugaison ponctuelle entre elle-même et chacune des deux coniques voisines, auquel cas chaque conique d'indice impair est conique de conjugaison tangentielle entre elle-même et chacune des deux coniques voisines. On a ce théorème.

*Soit une chaîne de $2n$ coniques $S'_1, S_2, S'_3, S_4, \ldots, S_{2n}$, conjuguées à un même triangle $OO'O''$, chaque conique d'indice pair S touche les quatre tangentes communes aux deux coniques voisines S', chaque conique d'indice impair S' passant aux quatre points communs aux deux coniques voisines S (ce qui fait seulement $2n - 1$ conditions) : il faut une condition pour qu'il* *existe un contour polygonal mobile de $n$ côtés dont les sommets $A'_1, A'_3, A'_5, \ldots$ soient sur la conique $S'$, et dont les côtés $a_2$, $a_4$, $a_6$, ... soient tangents aux coniques S. Si l'on se donne $A'_1$, on a deux positions possibles pour $a_2$, et le choix de $a_2$ détermine entièrement le contour.*

Le triangle conjugué étant donné, le système de coniques dépend de $2n$ paramètres. En considérant la conique $S_{2n}$ comme une enveloppe, on reconnaît que la dernière condition du théorème lie *généralement* $2n-1$ quelconques des coniques données.

La chaîne de $2n$ coniques du théorème précédent est la plus générale pour laquelle il existe un contour polygonal mobile..., si l'on exige que, un sommet étant choisi, avec l'un des côtés qui partent de ce sommet, le contour soit déterminé complètement.

19. Les points $A'_1$ et $A'_3$ ayant une correspondance unie, le lieu du point $(a'_1, a'_3)$ ou $A''_2$ est une conique $S''_2$ passant par les quatre points communs à $S'_1$ et $S'_3$ ; il suit de là que le contour variable $A'_1 a_2 A'_3 a_4 \ldots$ donne un contour variable analogue $a'_1 A''_2 a'_3 A''_4 \ldots$ dont les côtés roulent sur la conique $S'$, dont les sommets décrivent des coniques $S''$ ; et ainsi de suite indéfiniment. En considérant l'enveloppe de la droite $A_2 A_4$, on prolongerait cette suite de contours en sens inverse.

20. Un certain nombre des coniques précédentes peuvent être confondues. On doit remarquer d'abord que toute correspondance biforme entre deux éléments d'une même conique a quatre éléments unis. Si cette correspondance est symétrique, les points $A_1$ et $A_2$ sont conjugués par rapport à une conique $S_{12}$ qui passe aux points unis, les tangentes $a_1$ et $a_2$, . .; la correspon-

dance symétrique sur une conique est un cas limite de la correspondance unie sur deux coniques $S_1$ et $S_2$ ; les éléments unis donnent quatre points qui jouent le rôle des points communs aux deux coniques, et quatre tangentes....

Reprenons les faits du n° 16 :

1° Étant données deux coniques $S'$ et $S_2$, une tangente $b$ à $S_2$ rencontre $S'$ en deux points $A'$ et $C'$ : il y a correspondance biforme entre $A'$ et $C'$; cette correspondance est symétrique, et les points critiques sont les points communs aux deux coniques.

2° Avec deux coniques $S'$ et $S''_2$, en partant d'un point $B''$ de cette dernière, on a des faits corrélatifs.

3° Réciproquement, si les éléments $(A', a')$ et $(C', c')$ d'une conique $S'$ ont une correspondance biforme symétrique, l'enveloppe de la droite $A'C'$ est une conique $S_2$ passant par les points critiques, le lieu du point $(a', c')$ est une conique $S''_2$ qui touche les tangentes critiques.

La conique $S_2$ touche d'ailleurs les tangentes unies, la conique $S''_2$ passe aux points unis. La conique $S'_{13}$, par rapport à laquelle $A'$ et $C'$ sont conjugués, passe par les points unis; la conique $\Sigma'_{13}$ touche les tangentes unies.

Relativement au théorème du n° 18, on pourrait voir ici pourquoi on a introduit le mot *généralement* dans la remarque concernant la dernière condition.

On aurait en particulier le cas, considéré par Poncelet, où toutes les coniques $S'$ sont confondues.

## § IV.

21. *Contours triangulaires mobiles; deux cas.* — Lorsqu'un triangle mobile a ses sommets sur trois coni-

ques $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$, et ses côtés tangents à trois coniques $S_1$, $S_2$, $S_3$, d'une part, ce triangle peut devenir évanouissant, les côtés $a$, $b$, $c$ étant trois droites concourantes, ou les sommets $A'$, $B'$, $C'$ étant trois points en ligne droite; d'autre part, il peut devenir bi-évanouissant, deux sommets étant confondus, ainsi que les côtés opposés. Les six premières conditions relatives aux coniques étant supposées remplies, et elles se réduisent à cinq, une tangente commune à $S_1$ et $S_2$ doit toucher $S_3$, ou passer par un point commun à $S'_1$ et $S'_2$; un point commun à $S'_1$ et $S'_2$ doit appartenir à $S'_3$, ou se trouver sur une tangente commune à $S_1$ et $S_2$. Il semble donc que l'indétermination du triangle ait lieu dans trois cas; mais nous allons montrer que ces trois cas se réduisent à deux, attendu que, si les coniques S ont quatre tangentes communes, les coniques $S'$ sont polaires réciproques des coniques S par rapport à un système de quatre coniques $\Sigma$, de sorte que les coniques $S'$ ont alors quatre points communs.

Les équations des six coniques étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0, \qquad \frac{x^2}{a'^2}+\ldots=0, \qquad \frac{x^2}{a''^2}+\ldots=0,$$

$$\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{v^2}{\beta^2}-1=0, \qquad \ldots, \qquad \ldots,$$

si l'on écrit que le point $x=a\cos l$, $y=b\sin l$, $z=1$ est sur la tangente $u'=\alpha'\cos\lambda'$, $v'=\beta'\sin\lambda'$, $w'=-1$, on a

$$a\alpha'\cos l\cos\lambda'+b\beta'\sin l\sin\lambda'-1=0,$$

et l'on suppose

$$(a^2\alpha'^2-b^2\beta'^2)(a^2\alpha'^2-1)(b^2\beta'^2-1)\neq 0,$$

c'est-à-dire $S'_1$ et $S_2$ non bitangentes; les cinq conditions, pour que les six relations analogues aient les mêmes angles critiques, sont [1]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2\alpha'^2 & b^2\beta'^2 & 1 \\ \alpha'^2 a''^2 & \ldots\ldots & . \\ a''^2\alpha^2 & \ldots\ldots & . \\ \alpha^2 a'^2 & \ldots\ldots & . \\ a'^2\alpha''^2 & \ldots\ldots & . \\ \alpha''^2 a^2 & \ldots\ldots & . \end{vmatrix} = 0,$$

et elles expriment que $S'_1$ passe par les points communs à $S_2$ et $S_3$, .... Si l'on écrit que les trois coniques S sont inscrites à un même quadrilatère, on a la sixième condition

$$\begin{vmatrix} \alpha^2\alpha'^2 & \ldots & \ldots \\ \alpha'^2\alpha''^2 & \ldots & \ldots \\ \alpha''^2\alpha^2 & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons maintenant que, si l'on se donne $\alpha^2$, $\beta^2$, $\alpha'^2$, ... vérifiant cette condition, et $a^2$ à volonté, l'une des relations ci-dessus (rangées 1, 2, 7) détermine $b^2$, deux autres relations déterminent $a''^2$ et $b''^2$, deux autres déterminent $a'^2$ et $b'^2$, et l'on a une seule solution; or cette solution unique est facile à apercevoir : elle est formée par les relations

$$\frac{a^2}{\alpha^2} = \frac{a'^2}{\alpha'^2} = \frac{a''^2}{\alpha''^2} = \frac{1}{\mathcal{A}^2}, \qquad \frac{b^2}{\beta^2} = \ldots = \frac{1}{\mathcal{B}^2},$$

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A}^2 & \mathcal{B}^2 & 1 \\ \alpha^2\alpha'^2 & \ldots & . \\ \alpha'^2\alpha''^2 & \ldots & . \\ \alpha''^2\alpha^2 & \ldots & . \end{vmatrix} = 0.$$

---

[1] Ce qui signifie qu'on les obtient en égalant à zéro les cinq déterminants formés au moyen de trois lignes du Tableau rectangulaire qui constitue le premier membre de l'égalité.

qui donnent successivement $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{B}^2$, $b^2$, .... On peut donc remplacer les six relations entre les douze quantités $a^2$, $b^2$, ... par les huit relations précédentes entre les quatorze quantités $a^2$, $b^2$, ..., $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{B}^2$ : les six premières expriment que les coniques S′ sont polaires réciproques des coniques S par rapport aux coniques

$$(\Sigma) \qquad \pm \mathcal{A} x^2 \pm \mathcal{B} y^2 - z^2 = 0;$$

la dernière exprime que les coniques S sont inscrites à un même quadrilatère, et celle qui reste est une relation entre $\mathcal{A}^2$ et $\mathcal{B}^2$, les coniques S étant supposées connues (cette dernière relation peut aussi bien être rattachée aux coniques S′).

On peut donc prévoir ce théorème, qui sera démontré rigoureusement :

*Étant donnés deux systèmes de trois coniques* $S_1 S_2 S_3$, $S'_1 S'_2 S'_3$, *tels que dans la chaîne fermée*

$$\begin{array}{ccc} & S'_1 & \\ S_3 & & S_2 \\ S'_2 & & S'_3 \\ & S_1 & \end{array}$$

*chaque conique* S *touche les tangentes communes aux deux coniques voisines, et chaque conique* S′ *passe par les points communs aux deux coniques voisines* (5 *conditions*), *un triangle qui doit avoir ses côtés* $a$, $b$, $c$ *tangents aux coniques* S, *et ses sommets* A′, B′, C′ *sur les coniques* S′, *est indéterminé dans deux cas :*

1° *Lorsque les coniques* S *sont inscrites à un même quadrilatère, auquel cas les coniques* S′ *sont circonscrites à un même quadrangle, les coniques* S′ *étant polaires réciproques des coniques* S *par rapport à un système de quatre coniques* Σ;

2° *Lorsque les quatre tangentes communes à* $S_1$ *et*

$S_2$ *passent respectivement aux quatre points d'intersection de* $S'_1$ *et* $S'_2$, *auquel cas les quatre tangentes communes à* $S_2$ *et* $S_3$, . . . .

Chacun des deux systèmes de coniques dépend de 12 paramètres; pour le premier système, on peut se donner les coniques S inscrites à un même quadrilatère, et la conique $\Sigma$ avec un paramètre; pour le second système, on peut se donner les coniques S conjuguées à un même triangle, et les coniques $S'$ sont alors déterminées, avec quatre solutions. Dans chacun des deux systèmes, la première condition lie cinq quelconques des six coniques.

**22.** Dans le premier système les tangentes $a'$, $b'$, $c'$ en $A'$, $B'$, $C'$ sont concourantes, les points de contact A, B, C des tangentes $a$, $b$, $c$ sont en ligne droite; le lieu des points de concours des tangentes $a'$, $b'$, $c'$ est une conique $S''$ passant par les points communs aux coniques $S'$ et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{\mathfrak{b}^2 a^2 a'^2 a''^2} + \ldots - z^2 = 0.$$

l'enveloppe de la droite qui passe par les points de contact A, B, C est une conique polaire réciproque de la précédente par rapport aux coniques $\Sigma$. *A priori*, si l'on se donne les coniques $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$ et $S''$, avec quatre points communs, et si d'un point de $S''$ on mène aux coniques $S'$ les tangentes $\pm a'$, $\pm b'$, $\pm c'$, dont les points de contact sont $\pm A'$, $\pm B'$, $\pm C'$, l'enveloppe des droites $B'C'$ est une conique $S_1$, . . . .

**23.** Voici la démonstration rigoureuse du théorème énoncé plus haut. Les coniques $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$ ont pour équations

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0, \qquad a'^2x^2 + \ldots = 0, \qquad a''^2x^2 + \ldots = 0,$$

les coniques $S_1$, $S_2$, $S_3$ ont pour équations

$$\begin{aligned}
&(S_1)\ (b'^2c'^2u^2 + c'^2a'^2v^2 - a'^2b'^2w^2) - k^2\ (b''^2c''^2u^2 + \ldots) = 0,\\
&(S_2)\ (b''^2c''^2u^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\ ) - k'^2\ (b^2\ c^2\ u^2 + \ldots) = 0,\\
&(S_3)\ (b^2\ c^2\ u^2 + \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\ ) - k''^2\ (b'^2c'^2u^2 + \ldots) = 0,
\end{aligned}$$

avec deux conditions que nous retrouverons plus loin, et qui expriment que $S'_1$ passe par les points communs à $S_2$ et $S_3$, ....

Si l'on écrit que la droite joignant les deux points B′ et C′ donnés par les relations $a'x' = \cos l'$, $b'y' = \sin l'$, $c'z' = 1$ et $a''x'' = \cos l''$, ..., est tangente à la conique $S_1$, on a (n° 17) la relation

$$\left(A + \frac{\varepsilon k}{A}\right)\cos l' \cos l'' + \left(B + \frac{\varepsilon k}{B}\right)\sin l' \sin l'' - \left(C + \frac{\varepsilon k}{C}\right) = 0,$$

avec $A = \dfrac{a'}{a''}$, ..., $\varepsilon = \pm 1$; les angles critiques sont donnés par une équation qui se réduit à

$$\left(\frac{A^2}{k} + \frac{k}{A^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{B^2}{k} + \frac{k}{B^2}\right)\sin^2\varphi - \left(\frac{C^2}{k} + \frac{k}{C^2}\right) = 0,$$

sans $\varepsilon$. En faisant de même pour $S_2$ et pour $S_3$, on voit que les trois conditions d'indétermination du problème que l'on étudie sont

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1\\
\dfrac{A^2}{k} + \dfrac{k}{A^2} & \cdot & \cdot\\
\dfrac{A'^2}{k'} + \dfrac{k'}{A'^2} & \cdot & \cdot\\
\dfrac{A''^2}{k''} + \dfrac{k''}{A''^2} & \cdot & \cdot\\
\left(A + \dfrac{\varepsilon k}{A}\right)\left(A' + \dfrac{\varepsilon' k'}{A'}\right)\left(A'' + \dfrac{\varepsilon'' k''}{A''}\right) & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} = 0;$$

les deux premières conditions expriment que les points de $S'_1$ qui sont critiques pour $S'_2$ le sont pour $S'_3$, ..., c'est-à-dire que la conique $S'_1$ passe par les points communs à $S_2$ et $S_3$, ...; reste la dernière condition. Or, en développant les éléments de la dernière rangée, avec les relations $AA'A'' = 1$, ..., et en les combinant avec ceux des rangées précédentes, on trouve que l'on peut remplacer cette rangée par une autre dont les éléments sont

$$(\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' kk'k'' - 1)\left(\frac{\varepsilon A^2}{k} + \frac{\varepsilon' A'^2}{k'} + \frac{\varepsilon'' A''^2}{k''}\right), \quad \cdots.$$

On a donc une première solution $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' kk'k'' = 1$; elle donne la condition nécessaire $k^2 k'^2 k''^2 = 1$, qui exprime que les trois coniques S sont inscrites à un même quadrilatère; d'ailleurs les quatre relations

$$\left(A^2 + \frac{k^2}{A^2}\right)\cos^2\varphi + \ldots = 0, \quad \ldots, \quad k^2 k'^2 k''^2 = 1,$$

au lieu de déterminer $\varphi$, donnent la condition

$$(a^2 b'^2 c''^2) = 0,$$

qui exprime que les coniques $S'$ ont quatre points communs.

On a une seconde solution en remplaçant dans la matrice ci-dessus les éléments de la dernière rangée par les éléments $\frac{\varepsilon A^2}{k} + \frac{\varepsilon' A'^2}{k'} + \frac{\varepsilon'' A''^2}{k''}$, ...; je me suis assuré que cette seconde solution est bien celle du théorème énoncé.

Les points $B'$ et $C'$ sont conjugués par rapport à l'une des coniques $S'_2 + \varepsilon k S'_3 = 0$ : avec la première solution, ces coniques passent par les points communs aux trois coniques $S'$. On a un fait corrélatif.

24. Avec la première solution, le système de coniques

étant indépendant des signes $\varepsilon$, on a pour les mêmes coniques quatre espèces de triangles mobiles. Avec la deuxième solution, les coniques sont liées aux $\varepsilon$, une tangente commune à $S_1$ et $S_2$ pouvant passer par l'un ou l'autre des quatre points communs aux deux coniques $S'_1$ et $S'_2$; pour des coniques données, on a deux espèces de triangles.

25. *Cas où le triangle est conjugué par rapport à une conique fixe.* — Le système de coniques peut satisfaire à la fois aux conditions 1° et aux conditions 2° du théorème; il admet alors un système de triangles qui fait partie à la fois des deux solutions, trois autres systèmes de triangles qui font partie de la première solution, et un dernier système de triangles qui fait partie de la deuxième solution: ce sont ces derniers triangles que nous allons considérer, et ils sont conjugués par rapport à une conique fixe. Les six coniques étant dans le premier cas du théorème, supposons que l'une des quatre coniques $\Sigma$ (par rapport auxquelles les coniques $S'$ sont polaires réciproques des coniques $S$) touche les quatre tangentes communes aux coniques $S$, auquel cas les points de contact de ces tangentes avec $\Sigma$ sont les points communs aux coniques $S'$: on est en même temps dans le second cas du théorème, et la figure dépend de 11 paramètres; la conique $\Sigma$ ayant pour équation $\mathcal{A}x^2 + \mathcal{B}y^2 - 1 = 0$, en disposant des signes de $a, a', a'', b, b', b''$, on peut avoir $\frac{a}{\alpha} = \ldots = \frac{1}{\mathcal{A}}$, $\frac{b}{\beta} = \ldots = \frac{1}{\mathcal{B}}$, et alors, au n° 21, on peut prendre $l = \lambda$, $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$: en effet, les six relations entre les angles se réduiront à trois relations, telles que

$$\frac{\alpha\alpha'}{\mathcal{A}} \cos\lambda \cos\lambda' + \ldots - 1 = 0,$$

et si l'on écrit que ces trois relations admettent une infinité de solutions, la première condition exprime que la conique $\Sigma$ touche les tangentes communes aux coniques S; or les hypothèses $l = \lambda$, $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$ montrent que le triangle mobile est conjugué par rapport à la conique $\Sigma$, qui est à la fois $S'_{23}$, ..., $\Sigma_{23}$, ....

26. Les équations des coniques $S'_{23}$, ... étant $S'_2 = -\varepsilon k S'_3$, $S'_3 = -\varepsilon' k' S'_1$, $S'_1 = -\varepsilon'' k'' S'_2$, l'équation de la conique $\Sigma$ peut prendre ces trois formes : on a donc en multipliant $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' k k' k'' = -1$, ce qui est d'accord avec ce fait qu'on est dans le premier cas du théorème; on voit en même temps que le système de triangles ne fait pas partie de la première solution : c'est l'un des deux systèmes de la seconde solution. Soit $A'B'C$ un triangle de l'espèce de ceux que l'on considère ici, avec $\varepsilon = +$, $\varepsilon' = +$, $\varepsilon'' = +$, par exemple; la polaire de $A'$ par rapport à $\Sigma$ coupe $S'_2$ en deux points $B'$ et $\mathcal{B}'$, $S'_3$ en deux points $C'$ et $\mathcal{C}'$, le triangle $A'\mathcal{B}'\mathcal{C}'$ est dans les mêmes conditions que le triangle $A'B'C'$, et les deux triangles $A'B'\mathcal{C}'$ et $A\mathcal{B}'C'$ répondent aux hypothèses $\varepsilon = -$, $\varepsilon' = +$, $\varepsilon'' = +$, et font partie des triangles de la première solution; les trois sommets $A'$, $B'$, $C'$ donnent ainsi trois espèces de triangles. Une dernière série de triangles se rattache à la fois aux deux cas du théorème.

Les tangentes en $A'$, $B'$, $C'$ forment un triangle $A''B''C''$ inscrit à une conique fixe $S''$; les points de contact des côtés $a$, $b$, $c$ avec les coniques S forment un triangle circonscrit à une conique fixe. Le triangle $A''B''C''$ est dans les conditions du théorème de Poncelet.

27. *Cas où des coniques sont confondues.* — Si les coniques $S'_1$ et $S'_2$ se confondent en une même conique $S'$, sans que $S'_3$ se confonde avec elles, les coniques $S_1$ et $S_2$ doivent se confondre en une même co-

nique S; considérons ce cas. Nous appellerons *tangentes remarquables* de la conique S les tangentes à cette conique aux points d'intersection avec $S'_3$, lesquels points seront des points C'; les points remarquables de la conique S' seront les points de contact avec S' des tangentes communes à cette conique et à $S_3$, lesquelles tangentes seront des droites *c*. On a deux coniques S et S'; les sommets A' et B' d'un triangle décrivent la conique S', les côtés *a* et *b* roulent sur la conique S : le côté *c* roulant sur une conique $S_3$ qui passe par les points communs à S et S', on cherche le lieu du sommet C'; ce point est l'intersection de deux tangentes *a* et *b* à la conique S, lesquelles ont une correspondance biforme symétrique. L'un des points C' décrit une conique qui est dans le second cas du théorème, un autre également, et ces deux coniques ont été données, je crois, par Salmon (*Sections coniques*, 2e édition française, p. 599); les tangentes communes à S et $S_3$ passent aux points communs à S' et $S'_3$, les tangentes remarquables de S passent aux points remarquables de S', et l'on a des triangles bi-évanouissants. Les deux autres points C' décrivent une même conique $S'_3$ qui est dans le premier cas du théorème; la conique $S'_3$ passe aux points remarquables de la conique S', la conique $S_3$ touche les tangentes remarquables de la conique S, et l'on a des triangles évanouissants, formés par trois droites concourantes ou par trois points en ligne droite.

28. Dans le système de Poncelet, les trois coniques S' sont confondues, les coniques S étant distinctes; on est dans le second cas du théorème : les tangentes communes à $S_1$ et $S_2$ passent aux points remarquables de la conique $S'_1 = S'_2$ en donnant des triangles bi-évanouissants. .... On a un système corrélatif.

29. Les trois coniques $S'$ peuvent être confondues, les deux coniques $S_1$ et $S_2$ l'étant aussi : on cherche l'enveloppe du côté $c$. On peut rattacher ce cas à celui du n° 27, ou au système de Poncelet.

30. Les coniques $S'$ peuvent être confondues, les coniques S l'étant également : les tangentes remarquables de S passent aux points remarquables de $S'$; l'exemple de deux cercles vérifiant la relation d'Euler

$$d^2 = R^2 + 2Rr'$$

montre nettement ce que doit être un triangle bi-évanouissant dans le cas de deux coniques confondues : le côté double $a = b$ touche $S_1 = S_2$ en un point $C'$ situé sur $S'_3$, le sommet double $A' = B'$ est sur $S'_1 = S'_2$ en un point dont la tangente $c$ touche $S_3$.

§ V.

31. *Cas où les coniques* $S_p$ *sont confondues avec les coniques* $S'_{p+1}$. — Étant données $n$ coniques $S'_1, S'_2, \ldots, S'_n$, conjuguées à un même triangle $OO'O''$, si l'on cherche à quelles conditions un contour polygonal mobile peut avoir ses $n$ sommets sur ces coniques, le côté $A'B'$ étant tangent en $A'$ à $S'_1, \ldots$, on trouve d'abord qu'une tangente commune à $S'_2$ et $S'_3$ doit avoir son point de contact avec $S'_2$ situé sur $S'_1, \ldots$, et il reste une condition. Dans le cas $n = 3$ la condition d'indétermination est vérifiée d'elle-même, dans le cas $n = 4$ l'indétermination ne peut pas se produire.

En effet, la conique $S_p = S'_{p+1}$ ayant pour équations

$$\frac{x^2}{a_p^2} + \ldots = 0, \qquad a_p^2 u^2 + \ldots = 0,$$

si l'on pose $\frac{a_{p+1}}{a_p} = A_p, \ldots$, on a les relations

$$A_1 \cos l_1 \cos l_2 + \ldots = 0,$$
$$A_2 \cos l_2 \cos l_3 + \ldots = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

avec cette particularité : $A_1 A_2 \ldots = 1$, $B_1 B_2 \ldots = 1$, $C_1 C_2 \ldots = 1$.

Outre les conditions

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1^2 & B_1^2 & C_1^2 \\ A_2^2 & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{vmatrix} = 0,$$

on a une dernière condition d'indétermination. Pour $n = 3$, on l'obtient en ajoutant à la matrice ci-dessus la rangée $A_1 A_2 A_3 \ldots$, ou $1, 1, 1$, identique à la première rangée. Pour $n = 4$, si l'on met les relations sous la forme

$$\frac{\cos\theta_1}{\cos\varphi} \cos l_1 \cos l_2 + \ldots - 1 = 0,$$

on trouve que la condition d'indétermination est

$$\frac{(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_1)(\sin^2\varphi - \sin^2\theta_2)\ldots}{\sin^4\varphi \cos^4\varphi} - \left(\frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\theta_3 \cos\theta_4}{\cos^2\varphi} + \ldots - 1\right)^2 = 0;$$

or, à cause de $A_1 A_2 A_3 A_4 = 1, \ldots$, le dernier terme est nul, et la relation est impossible dans les conditions où l'on s'est placé au n° 6 : il faudrait accepter des correspondances tangentielles uniformes, et la question serait très différente de celle étudiée ici.

## NOTE.

Mon ami R. Bricard, dans une étude sur l'octaèdre articulé qui paraîtra prochainement dans le *Journal de* *l'École Polytechnique,* a rencontré de son côté le théorème du n° 2. Sa démonstration, qu'il m'a communiquée, montre que les conditions énoncées sont nécessaires, chacune des relations $F = o$, $F' = o$ étant supposée indécomposable.