Agrégation des sciences mathématiques. Concours de 1897

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 431-435
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__431_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES. CONCOURS DE 1897.

Mathématiques élémentaires.

1° Les droites Δ qui sont coupées harmoniquement par deux cercles donnés C et C′ enveloppent une conique; montrer que cette conique reste la même lorsqu'on remplace les deux cercles C et C′ par deux autres respectivement concentriques aux précédents et tels que la somme des carrés des rayons des deux nouveaux cercles soit égale à la somme des carrés des rayons des deux premiers.

2° Trouver le lieu des centres des cercles S qui sont coupés harmoniquement par deux cercles donnés C et C′ et qui sont orthogonaux à un troisième cercle donné Γ. Ce lieu est une conique Σ dont on déterminera les directions asymptotiques et dont on discutera le genre en admettant que le centre de Γ se déplace d'une façon quelconque dans le plan, tandis que les cercles C et C′ restent fixes.

On montrera que la direction des axes de Σ ne dépend que des positions des centres des trois cercles donnés et nullement de leurs rayons.

3° Trouver le lieu du centre de la conique Σ dans les deux hypothèses suivantes : 1° on fait varier le rayon du cercle Γ en laissant fixes le centre de ce cercle et les deux cercles C et C′; 2° on laisse fixe le cercle Γ, ainsi que les centres de C et de C′, et l'on fait varier les rayons de ces deux derniers cercles de telle sorte que la somme de leurs carrés reste constante.

4° Démontrer que les cercles S orthogonaux au cercle Γ et coupés harmoniquement par deux cercles C et C′ sont aussi coupés harmoniquement par une infinité de couples de cercles que l'on cherchera à caractériser géométriquement.

Nota. — On dit qu'un cercle S est coupé harmoniquement par deux cercles C et C′, lorsque le rapport anharmonique des deux points de rencontre de S avec C et des deux points de rencontre de S avec C′ est, sur le cercle S, égal à -1.

Mathématiques spéciales.

On considère un paraboloïde équilatère ayant pour équation, par rapport à des axes rectangulaires,

$$z = xy;$$

on prend sur l'axe Ox un segment

$$OM = \lambda$$

et sur l'axe Oy un segment

$$OM' = \mu,$$

ces deux segments étant liés par une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0,$$

où a, b, c, d désignent des constantes réelles.

1° Trouver la courbe Γ, lieu du point de rencontre de la génératrice rectiligne MG du paraboloïde passant par le point M de Ox avec le plan mené par Oz perpendiculairement à la droite MM'.

2° Combien existe-t-il de surfaces du deuxième ordre qui passent par cette courbe Γ; étudier le nombre des points d'intersection de Γ avec les génératrices rectilignes du paraboloïde donné; discuter la réalité de ces points.

3° Établir la relation nécessaire et suffisante qui doit lier les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 de quatre points de la courbe Γ, pour que ces quatre points soient dans un même plan. Former l'équation aux abscisses des points où le plan osculateur coupe la courbe en quatre points confondus; résoudre et discuter cette équation.

Indiquer le nombre de plans osculateurs qu'on peut mener d'un point de l'espace à la courbe Γ.

4° Comment faut-il déterminer les coefficients a, b, c, d pour que les tangentes à la courbe Γ fassent partie d'un complexe linéaire?

5° On désigne par Γ_1 la courbe du quatrième ordre qui correspond à cette détermination particulière des constantes a, b, c, d. Déterminer les points de contact des plans osculateurs menés d'un point donné P de l'espace à cette courbe Γ_1; démontrer que ces points sont dans un plan passant par P.

Nota. — On dit qu'une droite mobile

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$$

appartient à un complexe linéaire, quand les coefficients x_0, y_0, z_0, α, β, γ vérifient une équation de la forme

$$\begin{aligned} &A\alpha + B\beta + C\gamma + L(\gamma y_0 - \beta z_0) \\ &\quad + M(\alpha z_0 - \gamma x_0) + N(\beta x_0 - \alpha y_0) = 0, \end{aligned}$$

A, B, C, L, M, N désignant des constantes.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

On donne l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + q^2 - (px + qy - z)^2 = F\left(\frac{x^2 + y^2 + 1}{z^2}\right),$$

où p, q désignent les dérivées partielles du premier ordre de z considéré comme fonction de x, y.

1° Former les équations des caractéristiques et prouver que ces équations admettent deux intégrales qui ne dépendent pas de la forme de la fonction F.

2° Déduire du résultat obtenu que les courbes caractéristiques sont planes et que les développables caractéristiques sont des cônes. Dire quelle relation existe entre le plan d'une courbe caractéristique et le sommet du cône caractéristique circonscrit suivant cette courbe.

3° Indiquer comment l'on pourra utiliser ces résultats pour intégrer complètement l'équation proposée.

4° On mènera l'intégration jusqu'au bout dans le cas particulier où la fonction F a la forme

$$A\,\frac{x^2+y^2+1}{z^2}+B,$$

A, B désignant deux constantes.

Montrer que, dans ce cas, une intégrale complète est fournie par une surface du second degré dépendant de deux paramètres.

Mécanique rationnelle.

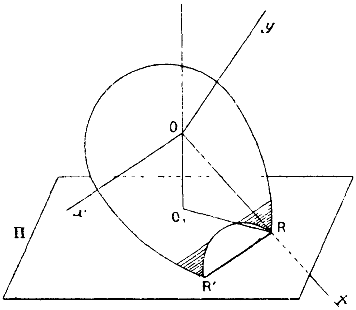
Un corps solide pesant, mobile autour d'un point fixe O, repose par deux de ses points R et R′ sur un plan horizontal fixe H situé au-dessous de O. Soit OO_1 la perpendiculaire abaissée de O sur le plan H : on suppose que l'angle ORR′ est droit et que l'on a, lorsque le corps repose sur le plan H,

$$OO_1 = O_1R = RR' = a.$$

Le point R glisse *avec frottement* sur le plan H, le point R′ glisse *sans frottement*.

Trouver le mouvement du corps en supposant qu'on lui imprime une vitesse initiale ω_0 (positive ou négative) de rotation autour de la verticale ascendante O_1O.

On prendra comme axes liés au corps la droite Oz dirigée suivant OR, la droite Ox parallèle à RR′ et dirigée dans le sens RR′, la droite Oy perpendiculaire au plan xOz et dirigée vers le haut. On supposera que les droites Ox, Oy, Oz sont les axes principaux d'inertie du corps relatifs au point O, et l'on appellera A, B, C les moments d'inertie correspondants. On désignera par ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G du corps par rapport aux axes Ox, Oy, Oz.



On se bornera à écrire les équations du mouvement dans le cas général où les coordonnées ξ, η, ζ sont quelconques.

On discutera le problème dans les deux cas particuliers suivants :

1° Le centre de gravité G est sur la partie positive de l'axe Oz;

2° Le centre de gravité G est sur la partie positive de l'axe Ox.

S'il arrive que l'un des points R et R' quitte le plan Π, ou que ces deux points le quittent à la fois, on se bornera à signaler ce fait sans étudier le mouvement ultérieur.