Questions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 387-388

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__387_0>

QUESTIONS.

1775. On donne un point O et une droite D fixes. Une figure de grandeur invariable formée d'un point ω et d'une droite Δ se déplace de façon que ω reste sur D et que Δ, s'appuyant toujours sur cette droite, passe toujours par O. On demande le lieu d'un point arbitraire du plan de la figure mobile. Examiner les différentes formes de ce lieu, lorsqu'on fait varier les données. (MANNHEIM.)

1776. Soit $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ une forme positive et $\varphi(h) = \sum' \frac{1}{f(x, y)}$, la somme étant étendue à tous les systèmes de valeurs entières des indéterminées x et y, tels que

$$f(x, y) \quad \text{soit} \quad < h.$$

On excepte, bien entendu, le système particulier $x = y = 0$, ce que nous indiquons en affectant le signe $\sum$ d'un accent. Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente indéfiniment. (J. FRANEL.)

1777. Soit, plus généralement,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum a_{rs} x_r x_s \begin{pmatrix} r = 1, 2, \ldots, p \\ s = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

une forme positive des p variables $x_1, \ldots, x_p$, $D = |(a_{rs})|$ son déterminant et

$$\varphi(h) = \sum' \frac{1}{[f(x_1, x_2, \ldots, x_p)]^{\frac{p}{2}}},$$

la somme étant étendue à tous les systèmes de valeurs entières des variables (à l'exception du système $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$) satisfaisant à l'inégalité

$$f(x_1, x_2, \ldots x_p) < h.$$

Démontrer que la différence

$$\varphi(h) - \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log h$$

tend vers une limite déterminée quand h augmente *indéfiniment.* (J. FRANEL.)

1778. Une conique rencontre les côtés BC, CA, AB d'un triangle en D, D', E, E', F, F'. Les tangentes en D, D' rencontrent AB, AC en K, K'. L est le conjugué harmonique de B par rapport aux F, F'. M est le conjugué harmonique de C par E, E'.

Démontrer que D'L, DM, KK', concourent en un même point. (W.-J. GREENSTREET.)

1779. La ligne OMN rencontre les lignes AB, AC en M et N, de telle sorte qu'on a

$$OM^2.AN.AC = ON^2.AM.MB.$$

Déterminer O. (W.-J. GREENSTREET.)

1780. On projette orthogonalement un parallélogramme décrivant un carré. Trouver la diagonale du carré en fonction des côtés du parallélogramme et de l'angle compris.

(W.-J. GREENSTREET.)

1781. Soient donnés trois nombres positifs x, y, z tels que

$$x + y + z = 1.$$

On a les inégalités

$$(1) \qquad yz + xz + xy < \tfrac{11}{48},$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 > 13xyz.$$

$$(3) \qquad (x^2 + y^2 + z^2) - (yz + xz + xy) > \tfrac{5}{16}.$$

(JORGE-F. D'AVILLEZ.)