Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 381-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__381_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1746

(1896, p. 440)

Le volume d'un tétraèdre est égal aux deux tiers du produit des sections faites par deux plans médians menés par deux arêtes opposées de ce tétraèdre, multiplié par le sinus de l'angle de ces deux plans et divisé par la médiane du tétraèdre suivant laquelle ils se coupent.

(GENTY.)

SOLUTION

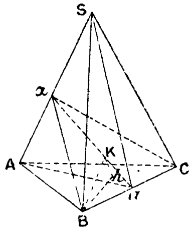
Par M. DULIMBERT.

Soient SABC le tétraèdre; SAa, αBC les deux sections médianes qui se coupent suivant la médiane $a\alpha$; ω le dièdre des plans $a\alpha$A, $a\alpha$B.

De B je mène la perpendiculaire BK sur la droite $a\alpha$ et la perpendiculaire Bh sur le plan médian SAa. BKh est l'angle plan du dièdre des deux plans médians. Donc $\mathrm{B}h = \mathrm{BK}\sin\omega$.

Cela posé, le volume du tétraèdre est égal à deux fois celui du tétraèdre BASa, c'est-à-dire à

$$\tfrac{2}{3}.\,\mathrm{SA}a.\mathrm{B}h = \tfrac{2}{3}.\mathrm{SA}a.\mathrm{BK}\sin\omega.$$



Or la surface de la section médiane αBC est égale à $a\alpha$.BK. Donc

$$\mathrm{BK} = \frac{\alpha\,\mathrm{BC}}{a\alpha}.$$

Donc enfin le volume est égal à

$$\frac{2}{3}\,\frac{\mathrm{SA}a.\alpha\mathrm{BC}}{a\alpha}\sin\omega. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Autres solutions de MM. BRAND et TARATTE.

Question 1750.

(1896, p. 528.)

Soit m un point quelconque d'une conique de centre O; *par les points* O *et m on mène les droites* O*p et mp, également inclinées sur les axes, respectivement, que la droite* O *m et la tangente en m. La perpendiculaire élevee à mp au point p passe par le centre de courbure en m.*

(E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Appelons m' le point où mp va couper ultérieurement la conique, et μ le symétrique de m par rapport à un axe de la courbe : mp est parallèle à la tangente en μ, et par suite p est le milieu de la corde mm'; mais le centre de courbure en m est sur un cercle mené par les points m et m'; donc, etc. La construction indiquée par M. Duporcq coïncide donc avec celle de Steiner (*Vorlesungen*, p. 312).

Autres solutions de MM. E.-N. Barisien, Droz-Farny et E. Taratte; un anonyme nous a aussi envoyé la suivante :

Les droites mt, mp, également inclinées sur les axes, ont pour diamètres conjugués les droites également inclinées sur les axes : Om, Op. Si l est le point où mp coupe la conique, le point p est alors le milieu de ml.

On sait que le cercle de courbure en m passe par l; son centre est sur la perpendiculaire à ml élevée du milieu p de cette corde.

Question 1753.

(1896, p. 583.)

Le lieu des pôles des spirales logarithmiques osculatrices aux diverses sections ayant même tangente en un point d'une surface est un cercle. (A. Pellet.)

SOLUTION

Par M. A. Mannheim.

Par la droite at, tangente en a à la surface donnée, menons un plan. Appelons α le centre de courbure, pour le point a, de la section S ainsi obtenue, et γ le centre de courbure correspondant de la développée de cette courbe.

La spirale logarithmique, tangente en a à S, et dont le centre de courbure de sa développée est γ, a un pôle p qu'on obtient en projetant α sur $a\gamma$.

Lorsque le plan sécant tourne autour de at les points tels que α décrivent un cercle C et la droite $a\gamma$ reste dans un plan (P) (¹) : *les pôles tels que p appartiennent alors au petit cercle tracé sur* (P) *de la sphère dont* C *est un grand cercle.*

(¹) *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 333 et 334.

Question 1757.

(1897, p. 100.)

Des paraboles ont un contact du second ordre avec une courbe plane donnée, en un même point de cette courbe; quelle est l'enveloppe de leurs axes? Déterminer, pour l'un de ces axes, le point où il touche cette enveloppe et construire le centre de courbure de cette courbe correspondant à ce point de contact (¹). (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Plaçons l'origine au point fixe de contact du second ordre, l'axe des x sera tangente commune. La parabole

$$(py + x)^2 + 2qy = 0, \tag{1}$$

qui fait partie du faisceau, n'a que le paramètre p de variable, car, à l'origine, sa dérivée seconde $-\frac{1}{q}$ est une constante. Le coefficient angulaire de l'axe de (1) est $-\frac{1}{p} = \tan\alpha$, et au sommet correspondant on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(py + x)}{p(py + x) + q} = p,$$

ou

$$py + x + \frac{qp}{1 + p^2} = 0, \tag{2}$$

équation de cet axe.

En combinant (2) avec sa dérivée relative à p, on a les coordonnées du point de contact de l'axe avec son enveloppe,

$$x = -\frac{2qp^3}{(p^2 + 1)^2}, \qquad y = q\,\frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}. \tag{3}$$

L'élimination de p entre (2) et (3) donne l'équation de l'en-

(¹) *Voir* aussi l'article de M. d'Ocagne, page 252; 1897.

veloppe

$$4y(y+q)^3+4x^4+8x^2y^2-20qx^2y-q^2x^2=0.$$

En substituant à p sa valeur $-\frac{1}{\tang \alpha}$, (2) s'écrira

$$\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}=q\sin\alpha,$$

et de (3) on tire la relation

$$\frac{x}{\cos 2\alpha}+\frac{y}{\sin 2\alpha}=q.$$

Chacune de ces droites est facile à construire, et leur rencontre déterminera le point de contact.

La normale en ce point

$$y-px=\frac{q}{1+p^2}(2p^2-1)$$

rencontre la normale infiniment voisine au centre de courbure, dont les coordonnées sont

$$x_1=-\frac{6pq}{(p^2+1)^2},\qquad y_1=\frac{q}{(p^2+1)^2}(2p^4-5p^2-1);$$

à l'aide de (3) on a

$$y-y_1=\frac{2qp^2}{(p^2+1)^2}(3-p^2),\qquad x-x_1=\frac{2qp}{(p^2-1)^2}(3-p^2);$$

d'où l'expression du rayon de courbure

$$l=\frac{2qp(p^2-3)}{(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}=2q\cos 3\alpha.$$

Autre solution de M. H. Brocard.

Question 1760.

(1897, p. 148)

Étant donnés deux faisceaux, l'un d'ordre m, l'autre d'ordre n, le lieu géométrique des points où les courbes des deux faisceaux se coupent sous un angle constant α est une courbe d'ordre $2(m+n-1)$. Quand $\alpha=0$, cette *courbe se décompose en une courbe d'ordre* $2(m+n)-3$ *et la droite de l'infini.* (E. Dewulf.)

SOLUTION
Par M. G. Leinekugel.

Considérons, en effet, les deux faisceaux linéaires

$$\text{(1)}\qquad Cm(x,y) \equiv \varphi m(x,y) + \lambda\,\psi m(x,y) = 0,$$

$$\text{(2)}\qquad Cn(x,y) \equiv \theta n(x,y) + \mu\,\chi n(x,y) = 0;$$

la condition pour que, en un point (x, y), les deux courbes se coupent sous un angle α, est

$$\text{(3)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\alpha\left(\frac{\partial Cm}{\partial x}\frac{\partial Cn}{\partial x} + \frac{\partial Cm}{\partial y}\frac{\partial Cn}{\partial y}\right)\\ &\quad = \frac{\partial Cm}{\partial x}\frac{\partial Cn}{\partial y} - \frac{\partial Cm}{\partial y}\frac{\partial Cn}{\partial x}.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de λ, μ entre les équations précédentes conduit à l'équation du lieu

$$\begin{aligned} &\operatorname{tang}\alpha[(\varphi'_x m\,\psi m - \psi'_x m\,\varphi m)(\theta'_x n\,\chi n - \theta n\,\chi'_x n)\\ &\qquad + (\varphi'_y m\,\psi m - \psi'_y m\,\varphi m)(\theta'_y n\,\chi n - \theta n\,\chi'_y m)]\\ &= (\varphi'_x m\,\psi m - \psi'_x m\,\varphi m)(\theta'_y n\,\chi n - \chi'_y n\,\theta n)\\ &\quad - (\theta'_x n\,\chi n - \chi'_x n\,\theta n)(\varphi'_y m\,\psi m - \psi'_y m\,\varphi m).\end{aligned}$$

Dans le cas où $\alpha \gtrless 0$, on voit nettement, en posant

$$\begin{aligned} \varphi m(x,y) &= A_m x^m + \ldots + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx - 2Ey + F = 0,\\ \psi m(x,y) &= A'_m x^m + \ldots + A'x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2E'y + F' = 0,\\ \theta n(x,y) &= a_n x^n + \ldots + ax^2 + 2bxy + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\\ \chi n(x,y) &= a'_n x^n + \ldots + a'x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\end{aligned}$$

que le degré du premier membre de l'équation est

$$m + m - 1 + n + n - 1 = 2(m+n-1);$$

dans le second membre, au contraire, le terme constant disparaît, et si les équations ont été rendues homogènes en x, y, z, le facteur z est en facteur d'où le lieu s'abaisse au cas où $\alpha = 0$ à $2(m+n)-3$.