C. Bourlet

Sur un déterminant remarquable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 369-373
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__369_1>

[B1c]

SUR UN DÉTERMINANT REMARQUABLE;

PAR M. C. BOURLET.

On sait, depuis longtemps, que si dans une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre m, on prend la dérivée logarithmique de la fonction comme nouvelle inconnue, on obtient une nouvelle équation différentielle d'ordre $(m-1)$, mais qui n'est plus linéaire. J'ai pu mettre cette équation sous forme d'un déterminant [1] et, en la formant, en particulier, pour une équation linéaire à coefficients constants, on parvient à l'égalité intéressante que voici :

$$\begin{vmatrix} n!\,a_0 & (n-1)!\,a_1 & (n-2)!\,a_2 & \dots & 2!\,a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -n & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(n-2) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & \dots\dots\dots\dots & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$= n!\,(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n).$$

(1) *Voir*, à ce sujet, mon récent Mémoire *Sur les opérations en général*, etc. (*Annales de l'École Normale supérieure*, avril et mai 1897, p. 167).

Or, M. Laisant a signalé autrefois ([1]) l'exemple analogue suivant :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$
$$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

auquel le précédent ne se ramène pas immédiatement. Ceci m'a amené naturellement à chercher à déterminer d'une façon générale tous les déterminants, du type précédent, tels que leur développement soit, à un facteur constant près, indépendant des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n$, identique au polynome

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Soit donc le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \alpha_0^1 x + \beta_0^1 & \alpha_1^1 x + \beta_1^1 & \alpha_2^1 x + \beta_2^1 & \dots & \alpha_n^1 x + \beta_n^1 \\ \alpha_0^2 x + \beta_0^2 & \alpha_1^2 x + \beta_1^2 & \alpha_2^2 x + \beta_2^2 & \dots & \alpha_n^2 x + \beta_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_0^n x + \beta_0^n & \alpha_1^n x + \beta_1^n & \alpha_2^n x + \beta_2^n & \dots & \alpha_n^n x + \beta_n^n \end{vmatrix}$$

et proposons-nous de déterminer, de la manière la plus générale, les coefficients α_i^k et β_i^k de façon que l'on ait, quels que soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ et x, l'identité

$$D = \mu f(x), \tag{1}$$

μ étant différent de zéro et ne dépendant ni de x, ni

([1]) *Voir* Laisant, *Sur un déterminant remarquable* (*Bull. de la Société math.*, t. XVII, p. 104); et encore, V. Gunther, *Ueber aufsteigende Kettenbrüche* (*Zeitschrift für Math. u. Phys.*, t. XXI, p. 187).

de a_0, a_1, ..., a_n. Multiplions, à cet effet, la première colonne de D par x^n, la seconde par x^{n-1}, la troisième par x^{n-2}, ... et ajoutons à la dernière. On aura

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & f(x) \\ \alpha_0^1 x + \beta_0^1 & \alpha_1^1 x + \beta_1^1 & \alpha_2^1 x + \beta_2^1 & \cdots & \varphi_1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_0^n x + \beta_0^n & \alpha_1^n x + \beta_1^n & \alpha_2^n x + \beta_2^n & \cdots & \varphi_n(x) \end{vmatrix},$$

en posant

$$\varphi_k(x) = (\alpha_0^k x + \beta_0^k) x^n + (\alpha_1^k x + \beta_1^k) x^{n-1} + \ldots + \alpha_n^k x + \beta_n^k.$$

Développons D par rapport à la dernière colonne,

$$D = (-1)^n \Delta f(x) + A_1 \varphi_1(x) + \ldots + A_n \varphi_n(x),$$

et l'identité (1) s'écrit

$$(2) \qquad A_1 \varphi_1(x) + \ldots + A_n \varphi_n(x) = [\mu - (-1)^n \Delta] f(x).$$

Je dis que cette dernière identité ne peut avoir lieu, quels que soient x, a_0, a_1, ..., a_n, que si l'on a, séparément,

$$\varphi_1(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(x) = 0, \qquad (-1)^n \Delta = \mu.$$

Il faut d'abord, en effet, que les deux membres de cette identité soient nuls; car, s'il n'en était pas ainsi, le second membre étant divisible par $f(x)$, le premier membre devrait l'être aussi, ce qui est impossible, puisqu'il ne contient pas a_n. Je dis, en second lieu, qu'on ne peut avoir, identiquement,

$$A_1 \varphi_1(x) + \ldots + A_n \varphi_n(x) = 0,$$

quels que soient a_0, a_1, ..., a_{n-1}, que si tous les polynomes $\varphi_k(x)$ sont tous nuls. Égalons à zéro le coefficient de a_{i-1} dans ce développement, et nous aurons

$$(3) \qquad A_1^i \varphi_1(x) + A_2^i \varphi_2(x) + \ldots + A_n^i \varphi_n(x) = 0$$
$$(\text{pour } i = 1, 2, \ldots, n),$$

A_i^k désignant le coefficient de l'élément situé dans la $k^{\text{ième}}$ ligne et la $i^{\text{ième}}$ colonne dans le développement du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_0^1 x + \beta_0^1 & \dots & \alpha_{n-1}^1 x + \beta_{n-1}^1 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \alpha_0^n x + \beta_0^n & \dots & \alpha_{n-1}^n x + \beta_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Si les égalités (3) pouvaient avoir lieu sans que tous les polynomes $\varphi_k(x)$ fussent nuls, il faudrait que le déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{vmatrix}$$

fût nul. Or, ceci est impossible, car Δ' est le déterminant adjoint de Δ; on a donc

$$\Delta' = \Delta^{n-1},$$

et Δ' ne pourrait être nul que si Δ l'était, ce qui ne peut avoir lieu, puisqu'on doit avoir

$$(-1)^n \Delta = \mu \neq 0.$$

On doit donc avoir, identiquement,

$$\varphi_k(x) = \alpha_0^k x^{n+1} + (\beta_0^k + \alpha_1^k) x^n + (\beta_1^k + \alpha_2^k) x^{n-1} + \ldots + \beta_n^k = 0;$$

ce qui entraîne

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha_0^k = 0, \quad \beta_0^k = -\alpha_1^k, \quad \beta_1^k = -\alpha_2^k \quad \ldots, \\ \qquad\qquad \beta_{n-1}^k = -\alpha_n^k, \quad \beta_n^k = 0. \end{cases}$$

Ces conditions (4) sont donc *nécessaires;* elles sont, d'ailleurs, suffisantes. Pour le vérifier, il suffit de prouver que, lorsqu'elles sont remplies, Δ *est une constante.* Or on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\alpha_1^1 & \alpha_1^1 x - \alpha_2^1 & \alpha_2^1 x - \alpha_3^1 & \dots & \alpha_{n-1}^1 x - \alpha_n^1 \\ -\alpha_1^2 & \alpha_1^2 x - \alpha_2^2 & \alpha_2^2 x - \alpha_3^2 & \dots & \alpha_{n-1}^2 x - \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_1^n & \alpha_1^n x - \alpha_2^n & \alpha_2^n x - \alpha_3^n & \dots & \alpha_{n-1}^n x - \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

ce qui, par des transformations faciles, donne

$$\Delta = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

En résumé, nous arrivons à la formule générale suivante qui donne tous les déterminants de la forme cherchée :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -\alpha_1^1 & \alpha_1^1 x - \alpha_2^1 & \alpha_2^1 x - \alpha_3^1 & \dots & \alpha_n^1 x \\ -\alpha_1^2 & \alpha_1^2 x - \alpha_2^2 & \alpha_2^2 x - \alpha_3^2 & \dots & \alpha_n^2 x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_1^n & \alpha_1^n x - \alpha_2^n & \alpha_2^n x - \alpha_3^n & \dots & \alpha_n^n x \end{vmatrix} = \mu(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n),$$

en posant

$$\mu = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix}.$$

La formule que j'ai donnée au début est le cas particulier où l'on prend

$$\alpha_i^k = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq k,$$

et

$$\alpha_k^k = \frac{1}{(m-k)!}.$$

La formule de M. Laisant est, de même, le cas particulier où l'on a

$$\alpha_i^k = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \neq k,$$

et

$$\alpha_k^k = 1.$$