Concours d'agrégation de 1896. Problème de spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 31-40
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__31_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1896.
PROBLÈME DE SPÉCIALES;

SOLUTION PAR UN « CORRESPONDANT » DES NOUVELLES ANNALES.

Étant donnés, en coordonnées rectangulaires, l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

et la sphère concentrique

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$

on prend les plans polaires d'un même point M *par rapport à ces deux surfaces. Ces plans se coupent suivant une droite* Δ.

1° *On demande quel lieu* Σ *engendre la droite* Δ *quand le point* M *décrit une droite quelconque* D *de l'espace.*

2° *Quel lieu doit décrire le point* M *pour que la droite* Δ *passe par un point fixe* P? *Quel est le degré du cône décrit par la droite* Δ?

3° *On demande quelle relation géométrique doit exister entre deux points* M, M′ *pour que les droites correspondantes* Δ, Δ' *se coupent.*

4° *Quel lieu* Γ *doit décrire le point* M *pour que la droite* Δ *demeure dans un plan fixe* Π,

$$ux+vy+wz+p=0.$$

Les coordonnées du point M *s'expriment alors rationnellement en fonction d'un paramètre.*

Trouver l'enveloppe E *de la droite* Δ *dans le plan* Π.

5° *Quel est le lieu de cette enveloppe quand le plan* Π *se meut parallèlement à lui-même?*

6° *D'après la quatrième partie, à tout plan* Π *se trouve attachée une ligne* Γ, *qui est le lieu des points pour lesquels la droite* Δ *correspondante se trouve dans le plan* Π *et, dans ce plan, ces droites* Δ *enveloppent une certaine courbe* E. *On suppose maintenant qu'un point* M *décrive le plan* Π : *montrer que la droite* Δ *correspondante s'appuie constamment en deux points sur la ligne* Γ *et que, réciproquement, toute corde de* Γ *correspond à un point* M *du plan* Π.

7° *Quel lieu décrit* Δ *quand le point* M *se déplace sur une tangente de la ligne* E, *ou bien quand le point* M *se meut sur la ligne* E *elle-même?*

Considérations géométriques. — Étant données deux quadriques, soit T leur tétraèdre conjugué commun de sommets A, B, C, D, les plans polaires d'un point M se coupent suivant une droite Δ qui est l'intersection de deux plans se correspondant homographiquement; par suite, l'ensemble de ces droites Δ constitue un complexe tétraédral ayant pour plans et points singuliers les faces et les sommets du tétraèdre T.

Remarquons que les conjuguées de Δ, par rapport aux deux surfaces, se coupent en M, et réciproquement toute droite dont les polaires se coupent est l'intersection des plans polaires du point de rencontre de ces conjuguées. De plus, la droite joignant les pôles d'un plan Q par rapport aux deux surfaces a des conjuguées se coupant dans ce plan Q et fait partie du complexe, et réciproquement toute droite Δ de ce complexe contient les pôles du plan déterminé par ses deux conjuguées; on peut donc dire que le complexe est défini de l'une des trois manières suivantes, qui sont équivalentes : c'est l'ensemble des intersections des plans polaires d'un point variable, l'ensemble des droites joignant les pôles d'un plan variable, et l'ensemble des droites dont les polaires se coupent. (*Voir* SCHRÖTTER, *Journal de Crelle,* t. 77; REYE, *Géométrie de position,* IIe Volume, p. 159.)

Quand le point M décrit une droite quelconque D de l'espace, Δ engendre une surface réglée du second ordre, car elle est l'intersection de deux faisceaux homographiques de plans ayant pour axes les conjuguées de D; pour que cette surface soit un cône, il faut et il suffit que ces conjuguées se coupent, par conséquent que D fasse partie du complexe; le cône est alors du second ordre. Pour que les droites Δ, Δ' relatives à deux points M et M' se coupent, il faut et il suffit que les quatre plans polaires de ces deux points passent par un même point, ou que les conjuguées de M et M' se coupent, par suite que MM' fasse partie du complexe.

Les droites Δ, situées dans un plan π, enveloppent la courbe E du complexe de ce plan, courbe qui est tangente aux quatre faces du tétraèdre T; on sait que si π tourne autour d'une droite située dans le plan d'une face, le lieu de ces courbes E est un cône ayant pour sommet le sommet du tétraèdre opposé à la face considérée.

Pour trouver le lieu des points M relatifs aux droites Δ du plan π, remarquons que les conjuguées de toutes les droites de ce plan, par rapport aux deux surfaces, décrivent deux gerbes homographiques autour des pôles p et p' de ce plan; celles qui se rencontrent correspondent aux droites Δ du complexe, et l'on sait que le lieu de leurs points de rencontre est une cubique gauche passant par p et p' ; cette cubique est identique au lieu des pôles du plan π par rapport aux surfaces du faisceau ponctuel déterminé par les deux quadriques données, et passe par les quatre sommets du tétraèdre T.

Supposons maintenant que le point M se déplace dans le plan π; soient Δ_1 et Δ_2 les tangentes issues de ce point à la courbe E; d'après la propriété des pôles et des plans polaires, la droite Δ relative à M doit contenir les deux points M_1 et M_2 relatifs à Δ_1 et Δ_2; c'est donc une droite s'appuyant sur la cubique en ces deux points M_1, M_2, et réciproquement à une corde $M_1 M_2$ correspond l'intersection M de Δ_1 et Δ_2. Si M décrit Δ_1, Δ décrit le cône s'appuyant sur la cubique et ayant pour sommet M_1. Si M est sur la courbe E, M_1 et M_2 sont confondus, et Δ est une tangente à la cubique; lorsque M décrit la courbe E, Δ engendre la développable de quatrième ordre formée par les tangentes à la cubique.

SOLUTION ANALYTIQUE.

Soient x, y, z les coordonnées du point M,

$$(\Delta)\qquad \begin{cases} \dfrac{Xx}{a^2} + \dfrac{Yy}{b^2} + \dfrac{Zz}{c^2} - 1 = 0, \\[2mm] \dfrac{Xx}{r^2} + \dfrac{Yy}{r^2} + \dfrac{Zz}{r^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

les équations de la droite Δ correspondante; nous désignons le rayon de la sphère par r pour éviter les confusions de notation dans ce qui suit.

Remarquons immédiatement que si la droite Δ passe par un point α, β, γ, la droite relative à ce dernier point passe par le point M.

Les coordonnées radiales de Δ sont

$$A = x\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right), \qquad P = \frac{yz}{r^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right),$$
$$B = y\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2}\right), \qquad Q = \frac{zx}{r^2}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right),$$
$$C = z\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{c^2}\right), \qquad R = \frac{xy}{r^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right);$$

par suite, cette droite appartient au complexe tétraédral

$$(\mathrm{T})\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\mathrm{AP} + \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{BQ} \\ &\qquad + \left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\mathrm{CR} = 0. \end{aligned}\right.$$

Si le point M décrit la droite D définie par les équations

$$(\mathrm{D}) \quad x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1+\lambda},$$

le lieu de Δ est la surface

$$\frac{\dfrac{\mathrm{X}x_0}{a^2} + \dfrac{\mathrm{Y}y_0}{b^2} + \dfrac{\mathrm{Z}z_0}{c^2} - 1}{\dfrac{\mathrm{X}x_1}{a^2} + \dfrac{\mathrm{Y}y_1}{b^2} + \dfrac{\mathrm{Z}z_1}{c^2} - 1} = \frac{\dfrac{\mathrm{X}x_0}{r^2} + \dfrac{\mathrm{Y}y_0}{r^2} + \dfrac{\mathrm{Z}z_0}{r^2} - 1}{\dfrac{\mathrm{X}x_1}{r^2} + \dfrac{\mathrm{Y}y_1}{r^2} + \dfrac{\mathrm{Z}z_1}{r^2} - 1},$$

ou, en désignant par A_0, B_0, C_0, P_0, Q_0, R_0 les coordonnées de D,

$$\sum \frac{\mathrm{YZ}}{r^2} A_0\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \sum \mathrm{X} P_0\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0;$$

elle admet, comme second système de génératrices, les polaires de D par rapport aux surfaces du faisceau ponctuel déterminé par l'ellipsoïde et la sphère.

Les droites Δ qui passent par un point P décrivent le cône du complexe relatif à ce point; les points M correspondants décrivent la droite Δ relative à P, d'après la remarque faite précédemment.

Pour que les droites $\Delta\Delta'$, relatives à deux points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, se coupent, il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} & -1 \\ \frac{x}{r^2} & \frac{y}{r^2} & \frac{z}{r^2} & -1 \\ \frac{x'}{a^2} & \frac{y'}{b^2} & \frac{z'}{c^2} & -1 \\ \frac{x'}{r^2} & \frac{y'}{r^2} & \frac{z'}{r^2} & -1 \end{vmatrix}$$

soit nul, et cette condition développée exprime que la droite MM' fait partie du complexe T; c'est aussi la condition pour que la surface réglée relative à la droite MM' soit un cône.

Pour que la droite Δ soit située dans un plan π de coordonnées u, v, w, p, il faut et il suffit que l'on puisse mettre l'équation de ce plan sous la forme

$$\frac{Xx}{r^2} + \frac{Yy}{r^2} + \frac{Zz}{r^2} - 1$$
$$+ \mu\left[Xx\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + Yy\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + Zz\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right)\right] = 0;$$

nous écrirons pour simplifier

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{\alpha^2}{r^2}, \qquad \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{\beta^2}{r^2}, \qquad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{\gamma^2}{r^2},$$

nous aurons alors

$$-\frac{u}{p} = \frac{x}{r^2}(1 - \mu\alpha^2), \qquad -\frac{v}{p} = \frac{y}{r^2}(1 + \mu\beta^2),$$
$$-\frac{w}{p} = \frac{z}{r^2}(1 + \mu\gamma^2),$$

d'où

$$x = -\frac{u}{p}\frac{r^2}{1+\mu\alpha^2}, \quad y = -\frac{v}{p}\frac{r^2}{1+\mu\beta^2}, \quad z = -\frac{w}{p}\frac{r^2}{1+\mu\gamma^2}.$$

Ces équations définissent, quand μ varie, le lieu du point M; c'est une cubique Γ passant par l'origine et par les points à l'infini sur les axes; réciproquement, la droite Δ relative à un point de cette cubique est située dans le plan π.

Le plan passant par Δ et par l'origine a pour équation

$$Xx\alpha^2 + Yy\beta^2 + Zz\gamma^2 = 0,$$

ou, en remplaçant x, y, z par les valeurs précédentes,

$$\frac{u\alpha^2 X}{1+\mu\alpha^2} + \frac{v\beta^2 Y}{1+\mu\beta^2} + \frac{u\gamma^2 Z}{1+\mu\gamma^2} = 0;$$

les coordonnées U, V, W de ce plan sont proportionnelles aux coefficients de X, Y, Z et satisfont, quand μ varie, à l'équation

$$\begin{vmatrix} U & U\alpha^2 & u\alpha^2 \\ V & V\beta^2 & v\beta^2 \\ W & W\gamma^2 & w\gamma^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\Sigma\, uVW\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2) = 0;$$

c'est l'équation de la trace sur le plan de l'infini du cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe E du complexe; on voit que cette courbe est une parabole tangente aux trois plans de coordonnées; comme l'équation est indépendante de p, on voit que le cône précédent est le lieu de la courbe E quand le plan π se déplace parallèlement à lui-même.

Supposons maintenant que le point M soit situé dans le plan π; en écrivant qu'il est sur une droite Δ de ce plan, on forme l'équation

$$f(\mu) = \frac{u\alpha^2 x}{1-\mu\alpha^2} + \frac{v\beta^2 y}{1+\mu\beta^2} + \frac{w\gamma^2 z}{1+\mu\gamma^2} = 0;$$

cette équation du second degré a deux racines que nous appellerons μ_1 et μ_2; elles définissent deux droites Δ_1 et Δ_2 passant par M et tangentes à E; elles déterminent aussi deux points M_1 et M_2 relatifs à ces tangentes et situés sur la cubique Γ. D'après la remarque faite au début, la droite Δ relative au point M commun à Δ_1 et Δ_2 passe par les deux points M_1 et M_2 et est une corde de la cubique; réciproquement, toute droite joignant deux points M_1 et M_2 de cette courbe est une droite Δ relative au point commun aux deux droites Δ_1 et Δ_2, relatives à M_1 et M_2, et ce point appartient au plan π.

En identifiant $f(\mu)$ avec la fraction rationnelle

$$\frac{(ux+vy+wz)\alpha^2\beta^2\gamma^2(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}{(1+\mu\alpha^2)(1+\mu\beta^2)(1+\mu\gamma^2)},$$

décomposée en fractions simples, et remarquant que le premier facteur du numérateur est égal à $-p$, on obtient les valeurs de x, y, z en fonction de μ_1 et de μ_2,

$$x = -\frac{p}{u}\,\frac{\beta^2\gamma^2(1+\mu_1\alpha^2)(1+\mu_2\alpha^2)}{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\gamma^2)},$$

$$y = -\frac{p}{v}\,\frac{\gamma^2\alpha^2(1+\mu_1\beta^2)(1+\mu_2\beta^2)}{(\beta^2-\gamma^2)(\beta^2-\alpha^2)},$$

$$z = -\frac{p}{w}\,\frac{\alpha^2\beta^2(1+\mu_1\gamma^2)(1+\mu_2\gamma^2)}{(\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2-\beta^2)};$$

c'est une représentation des coordonnées des points du plan π dans laquelle les droites Δ_1 et Δ_2 sont mises en évidence; si l'on suppose $\mu_2 = \mu_1$, on obtient les coordonnées des points de la courbe E.

Les équations de la droite Δ relative à un point M peuvent être remplacées par les suivantes

$$Xx + Yy + Zz - r^2 = 0,$$
$$Xx\alpha^2 + Yy\beta^2 + Zz\gamma^2 = 0,$$

ou bien, en introduisant les paramètres μ_1 et μ_2,

$$\sum \frac{X}{u} \frac{\beta^2\gamma^2(1 + \mu_1\alpha^2)(1 + \mu_2\alpha^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} + \frac{r^2}{p} = 0,$$
$$\sum \frac{X}{u} \frac{(1 + \mu_1\alpha^2)(1 + \mu_2\alpha^2)}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)} = 0.$$

Si le point M se déplace sur la tangente Δ_1 à E, μ_1 reste constant, et l'on obtient le lieu de la droite Δ en éliminant μ_2 entre les équations précédentes; en posant

$$H = \sum \frac{X}{u} \frac{1}{\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)},$$
$$K = \sum \frac{X}{u} \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)},$$
$$L = \sum \frac{X}{u} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)},$$
$$M = \sum \frac{X}{u} \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)},$$

on peut les écrire

$$\frac{r^2}{p} + H + (\mu_1 + \mu_2)K + \mu_1\mu_2 L = 0,$$
$$K + (\mu_1 + \mu_2)L + \mu_1\mu_2 M = 0,$$

et l'élimination de μ_2 donne l'équation

$$(K + \mu_1 L)^2 - (L + \mu_1 M)\left(\frac{r^2}{p} + H + \mu_1 K\right) = 0,$$

qui représente un cône ayant pour sommet M_1 et pour directrice la cubique Γ. Si M est sur la courbe E, on a $\mu_1 = \mu_2$, et le lieu de Δ s'obtient en éliminant μ_1 entre les équations précédentes où μ_2 a été remplacé par μ_1;

son équation est

$$\left(KL - MH - M\frac{r^2}{p}\right)^2 - 4(L^2 - KM)\left(K^2 - HL - L\frac{r^2}{p}\right) = 0;$$

ce lieu n'est autre que la développable formée par les tangentes successives à la cubique Γ.