NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. DE SAINT-GERMAIN

Note sur les déplacements d'une figure invariable

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 319-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__319_1>

[O8b]

NOTE SUR LES DÉPLACEMENTS D'UNE FIGURE INVARIABLE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Je me propose d'indiquer une méthode simple et uniforme pour démontrer le théorème fondamental sur les déplacements finis d'une figure dans un plan ou d'un solide dans l'espace : elle repose sur une considération analogue à celle dont se sert M. Kœnigs pour établir le caractère du déplacement élémentaire d'un solide. J'ajouterai quelques remarques se rapportant à l'une des propriétés caractéristiques de l'hélice.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'amener une figure plane F d'une position donnée à un autre dans son plan : il suffit, comme on sait, d'amener deux de ses points dans la position qu'ils doivent occuper. Prenons arbitrairement le premier de ces points et soient A, B ses positions initiale et finale dans le plan fixe : pour second point, je choisis celui qui se trouve d'abord en B et qui doit venir en un point C toujours bien déterminé : les droites AB, BC sont nécessairement égales. Soit O le centre de la circonférence passant par les points A, B, C : il est clair qu'en faisant tourner le triangle OAB autour du centre O, on peut l'amener en coïncidence avec son égal OBC, entraînant la figure à déplacer. Si les points A, B, C étaient en ligne droite, ce serait par une translation AB qu'on pourrait réaliser le déplacement donné de F.

Un raisonnement analogue montrerait qu'une rotation suffit pour imprimer un déplacement donné à une figure sur une sphère.

Supposons maintenant qu'on veuille donner un déplacement déterminé à un solide S : soient dans l'espace A, B les positions que doit prendre successivement un de ses points choisi arbitrairement ; le point qui se trouve d'abord en B devra venir en un point C qu'on doit regarder comme connu ; de même le point situé d'abord en C occupera une position D quand S sera dans sa seconde position. Il suffirait d'amener les trois points considérés des positions A, B, C en B, C, D pour donner à S le déplacement voulu. Il y a nécessairement égalité entre les droites AB, BC, CD, comme entre les angles ABC, BCD. Soient PQ la perpendiculaire commune aux bissectrices BB′, CC′ de ces angles et *pabcd* la projection de la figure PQABCD sur un plan normal à PQ en son milieu. Les angles *pbc*, *pcb* sont égaux comme mesurant des dièdres homologues dans les trièdres BPC*b*, CQB*c* dont les faces sont respectivement égales; donc pb est égal à pc. D'autre part, PB étant perpendiculaire au milieu de AC, pb l'est au milieu de ac, pa est égal à pc et les projections de BA et de BC sur la direction de PQ sont égales; la projection de CD aura aussi la même grandeur et pb est égal à pd. De ce qui précède, il résulte que les points A, B, C, D sont situés sur un cylindre de révolution autour de PQ et même sur une hélice tracée sur ce cylindre : il suffit de faire glisser le long de cette courbe les trois points considérés pour qu'ils passent de A, B, C en B, C, D, entraînant S dans leur mouvement hélicoïdal. Par les points A, B, C, D on pourrait faire passer une infinité d'hélices, mais on se borne à celle dont l'arc AB est moindre qu'une spire. Si les quatre points étaient en ligne droite, on pourrait obtenir le déplacement de S en le faisant glisser le long de AB et tourner autour de cette droite : c'est toujours un mouvement hélicoïdal.

Outre les trois points situés primitivement en A, B, C, nous en pourrions prendre dans S une série d'autres, choisis d'une manière analogue : celui qui, d'abord situé en D, doit passer en un point déterminé E, celui qui part de E et ainsi de suite; on formerait une ligne brisée qui, de la position ABCDE...G passerait en BCDE...GH. Non seulement les côtés et les angles doivent être égaux, mais aussi les dièdres BCAD, CDBE, ...; une telle ligne peut être appelée *ligne brisée régulière gauche à torsion constante*. On voit aisément que les droites CB, CD, les plans CBA, CDE, enfin les bissectrices BB', DD' sont symétriques par rapport à CC'; la perpendiculaire commune à CC' et à DD' est dans le prolongement de PQ, et l'hélice que nous avons vue passer par A, B, C, D passe par E et, de proche en proche, par tous les sommets de la ligne brisée. En supposant les côtés infiniment nombreux et infiniment petits, cette ligne deviendrait une courbe à courbure et à torsion constantes, qui ne différerait pas d'une hélice.

J'établirai enfin deux relations simples entre les éléments de la figure PQABCD. Soient M le milieu de BC, a la longueur MC, $180^\circ - 2\alpha$ l'angle BCD, 2β le dièdre BCAD, θ l'angle de BC avec PQ, R le rayon du cylindre contenant les points A, B, C, D. Si, dans le plan BCD, je mène à MC une perpendiculaire MO qui rencontre CC' au point O, j'aurai

$$\mathrm{MO} = a \cot\alpha, \qquad \mathrm{CO} = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Supposons PQ vertical et projetons sur un plan vertical, parallèle à BC : MC se projette en vraie grandeur suivant $m'c'$; la bissectrice CQO a sa projection $c'q'o'$ horizontale; enfin, la projection $m'o'$ de MO est perpendiculaire sur $m'c'$. Le dièdre BCOm', moitié de BCAD, a pour mesure l'angle de MO avec la perpendiculaire Mm' au plan vertical, et l'on a

$$m'o' = \mathrm{MO}\sin\beta = a\cot\alpha\sin\beta;$$

or, dans le triangle $m'o'c'$, l'angle o' est égal à θ et $m'o'$ à $a\cot\theta$: on a donc

$$\cot\theta = \cot\alpha\sin\beta.$$

Quant à R ou CQ, son rapport avec CO est égal à celui de leurs projections et l'on a, sans difficulté,

$$\mathrm{R} = \mathrm{CO}\,\frac{c'q'}{c\ o'} = \frac{a}{\sin\alpha}\sin^2\theta.$$

Si l'on passe au cas limite de l'hélice, les deux dernières formules conduisent aux deux relations bien connues

$$\cot\theta = \frac{\rho}{\tau}, \qquad \mathrm{R} = \rho\sin^2\theta.$$