NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Exercices préparatoires à la licence et à l'agrégation

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 285-289

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__285_1>

EXERCICES PRÉPARATOIRES A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION.

FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Licence ès Sciences mathématiques.

I. Étant donnée l'intégrale double

$$z = \int\int \sin x^2 y^3 \, dx \, dy$$

étendue à l'aire limitée par

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad xy = a, \qquad xy - x + mb = 0,$$

où a, b, m désignent des nombres positifs, effectuer le changement de variable

$$x = u + mv,$$
$$y = \frac{u}{u + mv};$$

démontrer que z a une limite si, b restant fixe, a croît indéfiniment.

II. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox et Oy, on considère une aire A et l'intégrale curviligne

$$\int P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

prise suivant le contour dans le sens positif; déterminer les fonctions P et Q de façon que cette intégrale représente le moment d'inertie par rapport à l'origine de l'aire A supposée homogène.

Agrégation des Sciences mathématiques.

Analyse. — I. On considère la courbe C enveloppe de la droite

$$3(y - tx)(3t^2 - 1) + t^3 = 0,$$

où t représente un paramètre variable.

1° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe soient sur une droite, huit points sur une conique, douze points sur une cubique, ces lignes ne passant par aucun point singulier de la courbe C.

2° Déterminer les points d'inflexion, les tangentes doubles, les coniques tangentes à la courbe en quatre points, les cubiques ayant en trois points donnés un contact du troisième ordre, ou en quatre points donnés un contact du second ordre.

II. On considère la biquadratique gauche définie par les deux équations

$$4x^2 + z^2 - 4xy - 4 = 0,$$
$$6y^2 - yz - 2zx + 2x + 13y = 0.$$

1° Exprimer les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points en fonction d'un paramètre t.

2° Trouver, à l'aide du théorème d'Abel, la condition pour que quatre points de la courbe soient dans un même plan, pour que huit points soient sur une même quadrique ne contenant pas la courbe, en général, pour que $4n$ points soient sur une même surface de degré n.

3° Démontrer que les plans osculateurs en quatre points, situés dans un même plan, coupent la courbe en quatre autres points également dans un même plan.

4° Trouver les points stationnaires; montrer qu'ils sont quatre à quatre dans un même plan.

5° Par une corde de la biquadratique on mène des plans tangents à la courbe, trouver leurs points de contact; montrer que le rapport anharmonique de ces plans tangents reste constant quand on fait varier la corde.

6° On considère une quadrique passant par la courbe; trouver la relation qui existe entre les deux points où chaque génératrice d'un même système de la quadrique rencontre la courbe.

Spéciales. — I. On considère un triangle ABC et les coniques S inscrites dans ce triangle; soient A′, B′, C′ les points de contact de ces coniques avec les côtés du triangle, et P le point de rencontre de AA′, BB′ et CC′.

1° Enveloppe des coniques S quand le point P est à l'infini.

2° Lieu du point P lorsque les coniques S restent tangentes à une droite D; nature de ce lieu suivant la position de la droite D.

3° Par un point M du plan passent deux coniques S, tangentes à D; si la droite joignant les points P relatifs à ces deux coniques est assujettie à passer par un point fixe Q, le lieu de M est une conique conjuguée par rapport à un triangle fixe indépendant de la position de Q.

4° Par un point M du plan passent deux paraboles inscrites dans le triangle ABC; si elles sont assujetties à se couper orthogonalement au point M, déterminer le lieu de ce point, l'enveloppe des tangentes avec deux courbes en ce point, et l'enveloppe de la droite joignant les points P correspondants.

II. On donne un ellipsoïde et un point M; on considère les droites D telles que chacune d'elles soit perpendiculaire au plan passant par sa conjuguée, par rapport à l'ellipsoïde et par le point M.

1° Démontrer que par un point quelconque de l'espace passent trois droites D; pour quelles positions du point deux ou trois de ces droites sont-elles confondues? Peuvent-elles former un trièdre trirectangle?

2° Dans un plan P existe, en général, une seule droite D; quels sont les plans renfermant une infinité de ces droites, et quelle est l'enveloppe de ces droites dans chacun d'eux?

3° On suppose que le plan P se déplace parallèlement à lui-même; former la surface engendrée par les droites D situées dans les positions successives de ce plan.

4° Pour quelles directions du plan P, ou bien pour quelles positions du point M cette surface est-elle réductible à une courbe plane, et quelle est cette courbe?

Élémentaires. — On donne une sphère de centre O, un plan P et un point S; on considère tous les cercles C de la sphère non parallèles au plan P, et projetés de S sur ce plan suivant des cercles.

1° Démontrer que les plans des cercles C se coupent suivant une même droite D.

2° Inversement, étant donnée une droite D, et le plan P restant arbitraire, il existe une infinité de points S tels que, pour chacun d'eux, la droite D satisfasse aux conditions énoncées précédemment, le plan P étant convenablement choisi. Trouver l'ensemble de ces points S lorsque la droite D est fixe, puis lorsqu'elle varie en passant par un point fixe.

3° Le plan P et le point S restant fixes, il existe sur la sphère un faisceau de cercles C_1 orthogonaux à tous les cercles C; lieu des sommets des cônes passant par un cercle particulier C_1 et par les cercles C successifs.

4° A chaque cercle C_1 correspondent des cercles C tels que l'un des deux cônes, passant par C et C_1, devienne un cylindre; trouver, lorsque C_1 varie, le lieu des parallèles aux génératrices de tous les cylindres ainsi formés, menées par un point de l'espace.

5° On suppose que le plan P reste fixe et que le point S décrive une droite Δ; trouver l'ensemble des droites D correspondantes; examiner le cas particulier où la droite Δ est parallèle ou perpendiculaire au plan P