Licence ès sciences mathématiques. Session de novembre 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 268-285

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__268_1>

LICENCE ES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Lille.

ANALYSE. — *Supposant connue la définition de l'intégrale définie d'une fonction continue entre deux* *limites finies, étendre cette définition au cas où l'une des limites devient infinie. Dans le cas où la fonction à intégrer est une fraction rationnelle, énoncer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse étendre jusqu'à l'infini les limites de l'intégration.*

MÉCANIQUE. — I. *Dans la théorie des courbes funiculaires, on étudiera les questions suivantes :*

1° *Équations d'équilibre d'un fil;*

2° *Équations intrinsèques;*

3° *Formule donnant la tension quand il existe une fonction des forces;*

4° *Équilibre d'un fil tendu sans frottement sur une surface fixe et soumis seulement aux forces appliquées à ses extrémités et aux réactions de la surface.*

II. *Deux points matériels pesants, dont les masses sont égales à l'unité, se meuvent sans frottement, l'un sur une droite verticale fixe, l'autre sur un plan fixe qui fait avec la verticale un angle égal à α; les deux points s'attirent proportionnellement à leur distance; étudier le mouvement.*

On prendra pour axe des z la verticale sur laquelle se meut le premier point, et pour axes des x et des y deux droites rectangulaires situées dans le plan fixe, l'axe des x étant une horizontale de ce plan.

ASTRONOMIE. — *En un lieu de colatitude γ, calculer pour l'époque sidérale t l'angle x de l'écliptique avec l'horizon et l'azimut y du point de rencontre de ces deux plans. On connaît l'obliquité ω de l'écliptique.*

Application numérique :

$$t = 2^{h}17^{m}36^{s},02, \qquad \gamma = 39^{\circ}21'16'',0, \qquad \omega = 23^{\circ}27'10'',76.$$

SESSION DE MARS-AVRIL 1897. — COMPOSITIONS.

Besançon.

ANALYSE. — I. *Étant donnée une circonférence* S, *déterminer une courbe* C, *telle que* M *étant un point quelconque pris sur la courbe* C, P *étant la polaire du point* M *par rapport à* S, C′ *l'enveloppe de cette polaire*, M′ *le point où* P *touche* C′, *la distance* MM′ *soit une constante donnée* l *indépendante de la position du point* M *sur la courbe* C. *Soit* O *le centre de* S; *étudier les variations de l'angle que fait la droite* MM′ *avec* OM. *Calculer la relation qui a lieu entre les rayons* OM *et* OM′, *ainsi que les angles que font les tangentes en* M *et en* M′ *aux courbes* C *et* C′ *respectivement avec les rayons* OM *et* OM′. *On étudiera la nature et la disposition de la courbe* C′.

II. *Calculer l'intégrale définie* $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos x \, dx$.

La seconde question étant classique, je me borne à indiquer la solution de la première. En désignant par r et θ les coordonnées polaires de M, par x et y les coordonnées rectilignes de M′, on a

$$x = \frac{R^2}{r^2}(r\cos\theta + r'\sin\theta), \qquad y = \frac{R^2}{r^2}(r\sin\theta - r'\cos\theta),$$

où $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$; et, en exprimant la condition de l'énoncé, on est conduit à l'équation

$$d\theta = -\frac{R^2\,dr}{r\sqrt{l^2 r^2 - (R^2 - r^2)^2}},$$

dont l'intégration est facile; a et b étant deux constantes déterminées par les équations

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{2R^2 + l^2}{R^4}, \qquad \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{R^4},$$

on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2(\theta - \theta_0)}{a^2} + \frac{\sin^2(\theta - \theta_0)}{b^2}.$$

La courbe C est par suite une ellipse. La courbe C′ est une ellipse égale à celle-ci, mais dont l'orientation diffère de 90° de celle de C. On reconnaît facilement que l'angle de MM′ avec OM varie toujours dans le même sens. En désignant OM′ par r_1, on a

$$r^2 - r_1^2 = a^2 - b^2$$

Enfin, V étant l'angle de la courbe C avec OM, on a

$$\sin V = \frac{R^2}{r r_1},$$

et la symétrie de cette formule montre que cet angle égale celui que fait la courbe C′ avec OM′.

Mécanique. — *Une barre pesante* AB *est reliée à un poids* P *situé sur la perpendiculaire élevée en son milieu; la base repose sur une chaînette renversée dont l'axe est vertical. Le poids* P *étant situé sur l'axe dans la position d'équilibre, étant donné que la barre roule sur la chaînette sans glisser, trouver en fonction du temps l'angle de* CP *avec la verticale.*

Le travail de la réaction étant nul, on peut employer le principe des forces vives. La force vive du système est la force vive du centre de gravité augmentée de la force vive due à la rotation. θ étant l'angle que fait la barre avec la base de la chaînette, x l'abscisse du point de contact, les coordonnées du centre de gravité G ont des expressions de la forme

$$x_1 = x - (a+l)\sin\theta$$
$$y_1 = (a+l)\cos\theta;$$

d'ailleurs

$$dx = \frac{a\,d\theta}{\cos\theta},$$

et l'on arrive à une équation de la forme

$$(a^2\tan g^2\theta + l^2 + k^2)\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2g(a+l)\cos\theta + \mathrm{H}.$$

Caen.

Analyse et Géométrie. — I. *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + y + u + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, on demande d'en déterminer l'intégrale particulière qui se réduit à $2y$ pour $x = 0$.

II. *Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, chercher les surfaces réglées Σ satisfaisant à la double condition :*

1° *Que leurs génératrices restent constamment parallèles au plan xOz;*

2° *Que les tangentes aux deux lignes de courbure qui passent en un point quelconque d'une surface Σ se projettent sur le plan xOy suivant deux droites également inclinées sur Ox.*

I. La méthode la plus nouvelle (Lagrange et Charpit) consiste à associer à l'équation proposée une équation qui permette de calculer les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Si l'on désigne ces dérivées par p et q, on peut prendre pour l'equation adjointe une intégrale quelconque du système

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2q^2 - p} = -\frac{dp}{1+p} = -\frac{dq}{1+q};$$

égalant la première et la dernière fraction, on a l'intégrale

$$x = \log\frac{1+q}{C}, \qquad q = Ce^x - 1.$$

On en conclut d'abord que u doit être de la forme

$$(1) \qquad u = (Ce^x - 1)y + \varphi(x):$$

d'ailleurs, $\frac{\partial u}{\partial x}$ est donnée par l'équation proposée et l'on doit avoir

$$Ce^x y + \varphi'(x) = x + y + (Ce^x - 1)y + \varphi(x) + (Ce^x - 1)^2:$$

ou, en simplifiant,

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = x + (Ce^x - 1)^2;$$

intégrant cette équation linéaire et reportant dans la formule (1)

$$u = (Ce^x - 1)y - x - 2 + C^2 e^{2x} - 2Cxe^x + C'e^x.$$

C'est une intégrale complète dont on sait tirer l'intégrale générale; mais il convient de voir si elle ne se réduit pas à $2y$ pour des valeurs convenables de C et C'; il suffit visiblement de faire $C = 3$, $C' = -7$.

II. L'équation des surfaces cherchées est de la forme

$$(1) \qquad z = xF(y) + \varphi(y).$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes aux projections des lignes de courbure sur OXY est

$$[(1+q^2)s - pqt]m^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]m + \ldots = 0.$$

Le coefficient de m doit être nul : or (1) r est nul : cette condition revient à $t = 0$, soit

$$xF''(y) + \varphi''(y) = 0;$$

$F''(y)$ et $\varphi''(y)$ sont nuls et l'on a

$$z = axy + bx + cy + f.$$

MÉCANIQUE. — I. *Établir les formules propres à déterminer, pour un instant donné, l'accélération des divers points d'un solide qui se meut autour d'un point fixe. Simplifier ces formules par un choix convenable des axes coordonnées : théorème de Rivals. Lieu des points du solide dont l'accélération tangentielle a une grandeur donnée, en supposant que la grandeur de la vitesse de la rotation instantanée ne varie pas avec le temps.*

II. *Deux points* A, B, *de masses égales à l'unité, sont liés l'un à l'autre par une tige de masse négligeable et de longueur constante* $2a$. *Le point* A *est assujetti à rester sur une droite* OZ *fixe et parfaitement polie; le point* B, *qui peut se mouvoir librement, sauf sa liaison avec* A, *est attiré vers* OZ *avec une intensité égale au produit de sa distance à* OZ *par une constante* ω^2. *A l'instant initial, l'angle* BAZ *est égal à* 30°; *la vitesse du point* A *est nulle; celle du point* B, *égale à* $\omega a\sqrt{8}$, *a une direction perpendiculaire sur* OZ.

Déterminer le mouvement du système : lignes décrites par B *et par le point milieu de* AB.

I. Prenons l'axe instantané pour axes des z et le plan tangent au cône décrit par cet axe pour plan des zx;

p, q, $\frac{dq}{dt}$ sont nuls; si, en outre, ω est constant, $\frac{dr}{dt}$ sera aussi nul; les composantes de l'accélération sont de la forme

$$J_x = -\omega^2 x, \qquad J_y = -z\frac{dp}{dt} - \omega^2 y, \qquad J_z = y\frac{dp}{dt};$$

l'accélération tangentielle est

$$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}J_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}J_y = -\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dp}{dt};$$

les points pour lesquels elle a une valeur donnée sont sur un conoïde défini par une équation de la forme

$$z = C\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

II. Les forces qui agissent sur A et B sont perpendiculaires à OZ ainsi que la vitesse initiale du milieu M de AB; M, qui est le centre de gravité, restera dans un plan normal à OZ et que je prends pour plan des xy. Les coordonnées de B sont de la forme

$$x = 2a\sin\theta\cos\psi, \qquad y = 2a\sin\theta\sin\psi, \qquad z = a\cos\theta,$$

celles de A étant o, o, $-a\cos\theta$.

Le théorème des aires projetées sur OXY donne

$$(1) \qquad \sin^2\theta\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

On a, en outre, l'intégrale des forces vives

$$4a^2\left(\cos^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) + 2a^2\sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}$$
$$= 8a^2\omega^2 - \omega^2 a^2(4\sin^2\theta - 1).$$

Remplaçons $\frac{d\psi}{dt}$ par sa valeur (1) et simplifions : on pourra diviser par le demi-coefficient de $\frac{d\theta^2}{dt^2}$, soit par

$a^2(2 - \sin^2\theta)$, et l'on aura

$$2\frac{d\theta^2}{dt^2} = \omega^2\frac{4\sin^2\theta - 1}{\sin^2\theta} = \omega^2\frac{3 - 4\cos^2\theta}{\sin^2\theta};$$

$$\frac{\omega\, dt}{\sqrt{2}} = -\frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{3 - 4\cos^2\theta}}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\cot\sqrt{2}.$$

Dans (1), remplaçons dt par sa valeur

$$d\psi = \frac{d\theta}{\sin\theta\sqrt{3 - 4\cos^2\theta}} = \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{3 - \cot^2\theta}};$$

(2) $$\cot\theta = \sqrt{3}\cos\psi.$$

La loi du mouvement est bien simple. Si l'on élimine θ et ψ entre les équations qui donnent les coordonnées de B et l'équation (2), on trouve

$$\frac{z}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 4x^2 + y^2 = 4a^2;$$

la trajectoire de B est une ellipse; celle de M est de même définie par les équations

$$z = 0, \qquad 4x^2 + y^2 = a^2.$$

J'ajoute que AB décrit une surface dont l'équation est

$$(4x^2 + y^2)(x\sqrt{3} - z)^2 = 3a^2x^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Deux stations, dont les longitudes diffèrent de* 180°, *ont une même latitude boréale. Il s'écoule* $5^h 30^m$ *de temps sidéral entre l'instant où Régulus se lève pour l'une des stations et celui où la même étoile se couche pour l'autre station; la déclinaison de Régulus est boréale et égale à* 12° 29′ 26″.

Calculer la latitude commune des deux stations, en ne tenant pas compte de la réfraction atmosphérique.

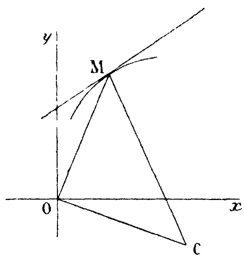
On trouve pour la latitude demandée 71° 25′ 44″, 8.

Grenoble.

Analyse. — I. *Étant donnée l'équation d'une famille de courbes*

$$\varphi = x \sin\theta - y \cos\theta - f(\theta) = 0,$$

déterminer $f(\theta)$ par la condition que le triangle qui a pour sommets l'origine O, un point M de l'enveloppe



des droites et le centre de courbure correspondant C soit rectangle et isoscèle. Courbe enveloppe des droites considérées.

Les coordonnées de M sont données par $\varphi = 0$, $\varphi'_\theta = 0$; celles de C par $\varphi'_\theta = 0$, $\varphi''_\theta = 0$, les droites $\varphi'_\theta = 0$, $\varphi_\theta = 0$ étant rectangulaires.

On a

$$\overline{OC}^2 = f'^2 + f''^2, \qquad \overline{OM}^2 = f^2 + f'^2, \qquad \overline{MC}^2 = (f + f'')^2.$$

Les conditions

$$OM = OC, \qquad \overline{CM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OC}^2$$

conduisent à

$$f = \pm f' = f'',$$

d'où

$$f = ae^{\pm\theta},$$

ce qui donne une spirale logarithmique pour la courbe cherchée.

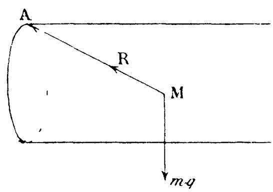
II. *Calculer les intégrales*

$$u = \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx, \qquad v = \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx.$$

On trouve

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tang} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}, \qquad v = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Mécanique. — *Un point matériel pesant* M, *de masse m, assujetti à se mouvoir sans frottement sur la surface d'un cylindre de révolution, de rayon a, dont les génératrices sont horizontales, est attiré de plus*



par un point A *situé sur la génératrice la plus élevée du cylindre proportionnellement à sa distance r à ce point* A. *La force d'attraction sera représentée par* $R = -m\mu^2 r$. *A l'origine le point matériel est placé en un point* M_0 *sur la génératrice du point* A *avec une vitesse* v_0 *perpendiculaire à* AM_0. *On demande le mouvement du point et la réaction de la surface dans le cas général où* μ *est quelconque.*

Examiner le cas suivant : on a $\mu^2 = \frac{g}{a}$.

Démontrer que dans ce cas la trajectoire est algébrique toutes les fois que le rapport $\frac{\mu a}{v_0}$ *est commensu-*

rable, et voir plus particulièrement ce qu'elle est lorsque $\frac{\mu a}{v_0} = 1$.

Le mouvement de la projection sur la génératrice du point A est un mouvement périodique dont la période est $\frac{2\pi}{\mu}$. Le mouvement de la projection sur la section droite du cylindre est le même que celui d'un point qui serait sollicité par une force verticale constante, mais dont la direction serait celle de la pesanteur ou la direction opposée suivant que $g - \mu^2 a$ est positif ou négatif. Dans tous les cas c'est un mouvement pendulaire. La réaction seule est changée.

Dans le cas où $\mu^2 = \frac{g}{a}$, la projection parcourt le cercle avec une vitesse angulaire constante et le mouvement dans l'espace est le même que celui d'un point qui serait attiré vers le centre O de la section droite du point A proportionnellement à la distance. Lorsque $\frac{\mu a}{v_0} = 1$, la réaction devient nulle, et le point décrit l'ellipse section du cylindre par le plan qui contient O et v_0.

Astronomie. — *A* $2^h 19^m 4^s,85$, *temps solaire vrai, la hauteur corrigée du centre du Soleil est*

$$h = 14°28'12''.$$

Calculer la latitude λ *du lieu, la déclinaison* $\mathfrak{D}$ *du Soleil étant* $\mathfrak{D} = -23°22'31'',45$.

Déterminer l'influence qu'aurait une erreur de ± 1 *seconde sur l'heure vraie relativement à la détermination de la latitude.*

Si α est l'angle horaire du Soleil, et φ un angle auxiliaire défini par $\operatorname{tang}\varphi = \cot \textcircled{d} \cos\alpha$, on aura

$$\sin(\lambda+\varphi) = \frac{\sin h \cos\varphi}{\sin \textcircled{d}},$$

$$d\lambda = -\frac{\cos\lambda \sin\varphi \operatorname{tang}\alpha}{\cos(\lambda+\varphi)}\, d\alpha.$$

On trouve successivement

$$\begin{aligned}
\alpha &= \quad 34^\circ.46'.12'',75\\
\varphi &= -62.14.51,06\\
\lambda &= \quad 45.11.38,32\\
d\lambda &= \pm \qquad 6,79 \text{ pour } d\alpha = \pm 15'.
\end{aligned}$$

Marseille.

Analyse. — *On considère les sections planes normales au paraboloïde* $xy = kz$ *aux points d'intersection de cette surface et du cylindre de révolution* $x^2 + y^2 = \rho^2$, *et tangentes à la courbe :*

1° *Exprimer le rayon de courbure de cette section plane en fonction du* z *du point mobile sur la courbe, et étudier sa loi de variation quand le point mobile décrit toute cette courbe.*

2° *Y a-t-il des points où la section plane soit tangente à l'une des lignes de courbure qui passent au point de la courbe d'intersection?*

3° *Distinguer cette ligne de courbure de l'autre ligne de courbure, et pour cela déterminer d'abord les lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique.*

4° *Démontrer enfin que les lignes de courbure du paraboloïde hyperbolique sont les lieux des points tels que leurs distances aux deux génératrices rectilignes qui passent au sommet aient une somme ou une différence constante.*

Mécanique. — *Dans un plan horizontal on donne* *une droite fixe* Ox *et deux points matériels* A *et* B *ayant chacun pour masse l'unité.*

Le point A *est assujetti à glisser sans frottement sur la droite* Ox, *le point* B *se meut librement dans le plan.*

Les deux points A *et* B *s'attirent mutuellement proportionnellement à la distance, et leur attraction à l'unité de distance est* k^2.

Ces deux points sont aussi tous deux attirés par le point O *proportionnellement à la distance, et l'attraction exercée sur chacun d'eux par le point* O *à l'unité de distance est* h^2.

On a d'ailleurs $k^2 = \frac{5}{4} h^2$.

Trouver le mouvement de ces deux points, et aussi le mouvement relatif de B *par rapport à* A.

Cas particulier :

A l'origine du mouvement : 1° *les points sont sans vitesse;* 2° *la droite* OA *est égale à* a ; 3° *la distance* AB *est égal à* a ; 4° *la droite* AB *est perpendiculaire sur* Ox.

Astronomie. — *Étant données les coordonnées équatoriales* (α, δ), (α', δ') *de deux étoiles, on demande de calculer les coordonnées équatoriales* (α_1, δ_1) *du pôle boréal du grand cercle qui passe par ces étoiles.*

Données numériques :

$$\alpha = 109^\circ 36' 19'', 8 \qquad \delta = -15^\circ 27' 34'', 3$$
$$\alpha' = 217^\circ 58' 18'', 6 \qquad \delta' = +42^\circ 19' 13'', 6.$$

Résultats :

$$\alpha_1 = 37^\circ 17' 17'', 76, \qquad \delta_1 = 47^\circ 40' 39'', 00.$$

Paris.

Analyse. — I. *Trouver les courbes qui sont normales aux droites*

$$ax \cos\varphi + by \sin\varphi = c^2 \cos\varphi \sin\varphi.$$

où φ désigne un paramètre variable et où a, b, c sont des longueurs constantes.

Chercher si, parmi ces courbes, il y a des coniques.

Examiner plus particulièrement le cas de $a = b$.

II. *Intégrer l'équation*

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + 2\,\frac{d^2 x}{dt^2} + x = t\cos t.$$

I. On voit immédiatement, *si l'on suppose*

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

que les droites proposées sont les normales à l'ellipse

$$x = a\sin\varphi, \qquad y = b\cos\varphi.$$

D'après cela, considérons l'ellipse

$$x = \mathrm{A}\sin\varphi, \qquad y = -\mathrm{B}\cos\varphi;$$

ses normales, qui sont représentées par l'équation

$$\mathrm{A}x\cos\varphi + \mathrm{B}y\sin\varphi = (\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)\cos\varphi\sin\varphi,$$

deviendront identiques aux droites proposées, si l'on fait

$$\mathrm{A} = a\,\frac{c^2}{a^2 - b^2}, \qquad \mathrm{B} = b\,\frac{c^2}{a^2 - b^2}.$$

En conséquence, si la différence $a^2 - b^2$ n'est pas nulle, les droites données sont les normales à l'ellipse que nous venons de définir, et les trajectoires demandées sont les *courbes parallèles* à cette ellipse. Une seule d'entre elles est une conique; c'est l'ellipse elle-même.

Si l'on suppose maintenant

$$a^2 - b^2 = 0,$$

les droites proposées ont pour enveloppe la courbe

$$x = \frac{c^2}{a}\sin^3\varphi, \qquad y = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi,$$

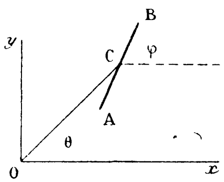
qui est l'hypocycloïde à quatre rebroussements; les trajectoires cherchées sont les développantes de cette courbe.

II. L'équation proposée a pour intégrale générale

$$x = (A + A_1 t)\cos t + (B + B_1 t)\sin t + \frac{t^2}{8}\sin t - \frac{t^3}{24}\cos t,$$

A, A_1, B, B_1 étant quatre constantes arbitraires.

MÉCANIQUE. — *Sur un plan horizontal parfaitement poli* xOy *est placée une barre homogène* AB, *de masse* M *et de longueur* $2a$. *Le milieu* C *de cette barre est attaché à un point fixe* O *du plan par un fil*



élastique OC *dont on néglige la masse et dont la longueur à l'état naturel est* a. *Le point* C *étant écarté de* O *de façon à tendre le fil et à lui donner une longueur* r_0 *supérieure à* a, *on lance la barre sur le plan.*

Trouver le mouvement.

A un instant quelconque t, *on appellera* r *et* θ *les coordonnées polaires du point* C *et* φ *l'angle de la barre avec* Ox.

On admettra que la tension du fil élastique OC, *quand sa longueur est* r, *est proportionnelle à son allongement* $r - a$ *et, par suite, que l'intensité de cette tension est* $M\lambda^2(r - a)$, λ^2 *désignant une constante.*

CINÉMATIQUE. — *Quelle courbe faut-il faire rouler sans glisser sur une ligne droite pour que deux* *points* A, B *liés à cette courbe possèdent constamment des vitesses dont le rapport soit un nombre constant m?*

Quelles courbes décrivent alors les points A *et* B? *Y a-t-il d'autres couples de points jouissant de la même propriété?*

Astronomie. — *Quelle est, en temps vrai et en temps moyen, l'heure du coucher géométrique du centre du Soleil à Paris, le jour du solstice d'été?*

Latitude de Paris	$48°50'11''$
Déclinaison du Soleil	$+23\ \ 27\ \ 18,7$

Temps moyen à midi vrai :

Le jour du solstice	$0^h\,1^m\,27^s,21$
Le lendemain	$0^h\,1^m\,40^s,33$

Poitiers.

Analyse. — *Une surface* S *est rapportée à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz. *Dans le plan des* xy, *un élément superficiel infiniment petit du second ordre est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à* Oz. *Le volume compris dans ce cylindre, entre le plan des* xy *et la surface* S, *se trouve être égal au produit d'une constante donnée* a *par l'aire interceptée sur la surface* S.

Écrire l'équation aux dérivées partielles (E) *à laquelle satisfait la surface* S. *Trouver une intégrale complète de l'équation* (E).

Démontrer que l'équation (E) *a des solutions communes avec l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de* Oz, *et déterminer une solution commune, telle que pour*

$$z = a$$

on ait

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

MÉCANIQUE. — *Une droite matérielle homogène* AB, *de longueur* $2a$, *de densité* 1, *mobile sans frottement, sur un plan horizontal, est articulée en* B, *avec une tige sans masse* OB, *de longueur* a, *animée d'un mouvement uniforme de rotation autour du point* O, *dans le même plan. Tous les points de* AB *sont repoussés de* O, *proportionnellement à leurs distances à ce point et à leurs masses. Étudier le mouvement de* AB.

ASTRONOMIE. — *Ayant les éléments d'une éclipse de Lune, calculer les heures des principaux contacts et la grandeur de l'éclipse.* (*Les données se rapportent à l'éclipse du* 12 *juillet* 1870.)