GINO LORIA

Identité de la strophoïde avec la focale à nœud. Son application à l'optique géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 262-265

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__262_1>

comme suit (¹) : *Soient* I *le point obtenu en prolongeant la normale* OC *vers l'extérieur de la courbe de la quantité* $OI = \frac{\rho}{2}$, *et* S *le symétrique du centre de seconde courbure* C_1 *par rapport à* I. *La perpendiculaire élevée en* S *à* C_1S *passe par le centre de troisième courbure* C_2.

Lorsque cette condition est vérifiée, il existe donc au point O une parabole ayant avec la courbe un contact du quatrième ordre, c'est-à-dire une *parabole surosculatrice*.

[M¹5cα]

IDENTITÉ DE LA STROPHOIDE AVEC LA FOCALE A NŒUD. SON APPLICATION A L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. GINO LORIA,
Professeur à la Faculté des Sciences de Gènes (Italie).
(Extrait d'une lettre adressée à M. Laisant.)

.... Vous vous rappelez sans doute l'histoire de la strophoïde. Découverte par Torricelli, qui la considérait comme le lieu des foyers des sections planes produites dans un cône droit par les plans qui passent par une tangente perpendiculaire à une des génératrices du cône, elle a été étudiée à ce point de vue par Guide Grandi, dans un Traité inédit, et après par Grégoire Cazalis, dans deux remarquables Mémoires. Indépendamment de ces géomètres, elle a été définie de la même manière, en 1819, par Quetelet et étudiée ensuite par Dandelin et Chasles. D'autre part, elle a été définie et traitée (particulièrement la strophoïde droite) dans le plan par un grand nombre de géomètres, qui l'engen-

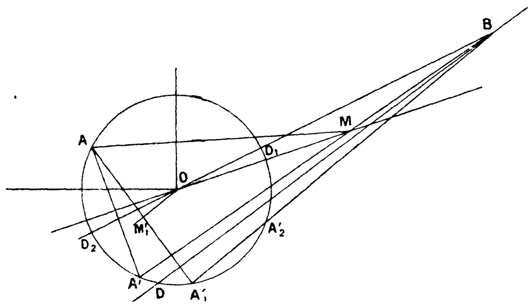
(¹) Le lecteur est prié de faire la figure.

draient au moyen d'un angle donné par le procédé bien connu que je rappellerai plus bas : on n'a peut-être pas remarqué que le premier entre ces géomètres est A. de Moivre, dont on a une Note : *A ready description and quadrature of a curve of the third order, resembling that commonly called the Foliate,* dans les *Phil. Transactions* de l'année 1715.

Or, pour établir un lien entre les recherches sur la strophoïde définie *in solido* et celle dont le point de départ est la définition *in plano,* on peut employer un raisonnement très simple et tout à fait élémentaire dont Quetelet et Dandelin ont fait usage (*voir* notamment *Mathesis,* t. VI, p. 222).

Permettez-moi de profiter de cette occasion pour fixer un instant votre attention sur un problème d'Optique géométrique qui est résolu par la strophoïde. C'est une question résolue par M. E. Sang (*voir* la Note *On the curves produced by reflection from a polisphed revolving straight wire,* qui se trouve dans les *Trans. of the R. Society of Edinburgh,* Vol. XXVIII, Part I, p. 273-276; 1877) qui l'a traitée par la Géométrie analytique, sans toutefois remarquer que la courbe dont il donne l'équation n'est autre chose qu'une strophoïde oblique ; en conséquence, il a imaginé une nouvelle méthode pour construire cette courbe, méthode qu'on peut joindre à toutes les autres connues.

Voici le problème optique dont il s'agit : Dans un plan sont placés en A un point lumineux et en B l'œil d'un observateur; soit O un point fixe du même plan, autour duquel tourne une droite réfléchissante s (miroir); à chaque position de s correspond un rayon lumineux sortant de A et se réfléchissant en B : quel est le lieu géométrique de tous les points d'incidence M? Pour répondre à cette question, je remarque qu'étant prise arbitrairement une position du miroir s, pour trouver la position correspondante du point M, il suffit de trouver le point A′ symétrique de A par rapport à s, de le joindre par



une droite à B et de déterminer l'intersection des droites A′B et s. Or, le lieu des points A′ est le cercle C de centre O et de rayon OA. Donc notre courbe est engendrée par deux faisceaux de rayons dont les centres sont O et B, et entre lesquels existe une correspondance algébrique (1, 2). A chaque rayon s du premier faisceau correspond la droite qui joint B au symétrique A′ de A par rapport à s. Et pour tracer les rayons du premier faisceau, qui correspondent à un rayon r du premier, déterminons les intersections A'_1, A'_2 du rayon r et du cercle C; les normales abaissées de O sur les droites AA'_1 et AA'_2 seront les rayons cherchés, et les points $rs_1 = M_1$, $rs_2 = M_2$ seront deux points de la courbe. Il s'ensuit que cette courbe est du troisième ordre et a un point double en O et un point simple en B. Si l'on suppose que s passe par un des points circulaires à l'infini, on verra que ce point est situé sur la courbe; celle-ci est donc une cubique circulaire non moins que rationnelle. Pour avoir les tangentes de la courbe en B et en O, il suffit de trouver dans chaque faisceau le rayon (ou le couple de rayons) qui correspond à la droite qui joint les deux centres. En conséquence, la tangente en B n'est autre que la droite qui joint B au symétrique D du point A par rapport au diamètre OB; et, pour trouver les tangentes en O, on marque les extrémités D_1 et D_2 du diamètre OB, et les normales aux cordes AD_1 et AD_2 seront les tangentes à la courbe. Comme ces tangentes sont évidemment perpendiculaires entre elles, nous concluons que *le lieu cherché est une cubique circulaire qui a un point double à tangentes orthogonales.* C'est donc une strophoïde, comme je l'avais annoncé. ....

[D1b]

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DES POLYNOMES DE M. LÉAUTÉ;

PAR M. PAUL APPELL.

Pour exprimer une fonction $f(x)$, connaissant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées dans un intervalle donné, de $-h$ à $+h$, par exemple. M. Léauté (*Comptes rendus*, 14 juin 1880; *Journal de Liouville*, 1881) a considéré une suite de polynomes $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ de degrés $0, 1, 2, \ldots, n$ en x, possédant les propriétés caractéristiques suivantes :

$$P_0 = 1; \tag{1}$$

$$\frac{dP_n}{dx} = P_{n-1}, \qquad n \geqq 1; \tag{2}$$

$$\int_{-h}^{+h} P_n \, dx = 0, \qquad n \geqq 1. \tag{3}$$

La relation (2) permet de déduire chaque polynome du précédent par une quadrature, et la condition (3)