NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

M. D'OCAGNE

Sur les coniques qui ont avec une courbe donnée en un de ses points un contact d'ordre supérieur (à propos de la question 1757)

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 252-262

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__252_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

[O2i]

SUR LES CONIQUES QUI ONT AVEC UNE COURBE DONNÉE EN UN DE SES POINTS UN CONTACT D'ORDRE SUPÉRIEUR (A PROPOS DE LA QUESTION 1757);

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Cette Note contient une solution de la question 1757, ainsi que divers développements qui s'y rattachent.

Soit, au point O considéré sur la courbe donnée, C le centre de courbure. Proposons-nous d'étudier l'enveloppe des axes des paraboles qui ont avec la courbe en ce point un contact du second ordre, c'est-à-dire qui sont tangentes en O à la courbe donnée et admettent en ce point le centre de courbure C.

On sait que *la projection du centre de courbure sur le diamètre, en un point d'une parabole, se trouve sur la perpendiculaire élevée à la normale par le point où celle-ci rencontre l'axe* (2).

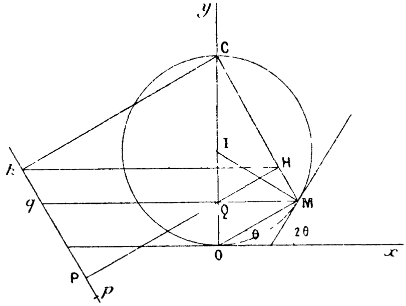
Il résulte de là que si l'on se donne le diamètre OM

(1) Voir *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 227.

(2) Ce théoreme résulte de l'extension à la parabole de celui que M. Mannheim a demontré pour l'ellipse.

de l'une des paraboles considérées au point O (*fig.* 1), il suffit de projeter le centre de courbure C en M sur

Fig. 1.



OM, puis le point M en Q sur OC, et de tirer par Q la parallèle QP à OM pour avoir l'axe de cette parabole.

L'axe étant ainsi construit, il serait facile d'obtenir son enveloppe, mais, ce problème ayant déjà été résolu, nous le laissons de côté ([1]). On sait que cette enveloppe est une hypocycloïde à trois points de rebroussement (dont l'un au point C), engendrée par un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{3R}{4}$.

Nous nous contenterons d'indiquer la construction demandée du point P où l'axe touche son enveloppe, et du centre de courbure correspondant p de cette enveloppe.

Si l'on appelle θ l'angle que OM fait avec la tangente Ox, la tangente en M au cercle, décrit sur OC comme diamètre, fait avec Ox l'angle 2θ.

([1]) *Voir* le *Recueil d'Exercices* de Tisserand (2e édit., 1re Partie, probl. n° 35, p. 73). Nous signalerons à ce propos un défaut de la *fig.* 9 (*loc. cit.*, p. 76). La distance du point O à la droite AC est égale à $\frac{R}{8}$, c'est-à-dire à $\frac{OB}{8}$.

Par suite, en représentant par $d(\mathrm{Q})$ et $d(\mathrm{M})$ les différentielles des arcs décrits par Q et M, on a

$$\begin{aligned} d(\mathrm{Q}) &= d(\mathrm{M})\sin 2\theta, \\ &= \mathrm{MI}\sin 2\theta . d(2\theta), \\ &= 2\mathrm{MQ}.d\theta. \end{aligned}$$

Mais la normale MQ, au lieu de Q, coupant en q la normale $\mathrm{P}p$ à l'enveloppe de PQ, on a, puisque cette dernière droite fait aussi l'angle θ avec $\mathrm{O}x$,

$$d(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}q.d\theta.$$

Par suite,

$$\mathrm{Q}q = 2\mathrm{MQ},$$

ou

$$\mathrm{QP} = 2\mathrm{HQ}.$$

Ainsi, *l'axe* PQ *rencontrant* CM *au point* H, *il suffit de prolonger* HQ *du double de sa longueur pour obtenir le point* P *où l'axe* PQ *touche son enveloppe.*

Remarquons que le lieu du point H n'est autre que la podaire de cette enveloppe par rapport au point C. Si donc h est la projection de ce point C sur la normale $\mathrm{P}p$ à cette enveloppe, $\mathrm{H}h$ est la normale au lieu de H. Il en résulte, d'après un théorème bien connu de M. Mannheim, le rapport $\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{HQ}}$ étant constant et égal à 2, que

$$\frac{qp}{hq} = 2.$$

Il suffit donc encore de *prolonger hq du double de sa longueur pour obtenir le centre de courbure p.*

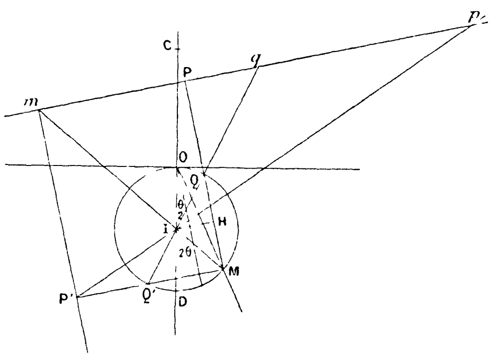
2. Résolvons le même problème pour les axes des hyperboles équilatères qui ont aussi en O un contact du second ordre avec la courbe considérée, c'est-à-dire qui admettent aussi le point C pour centre de courbure.

On sait que, *dans une hyperbole équilatère, la projection du centre de courbure sur le diamètre, en un point, est symétrique du centre par rapport à ce point* (1).

D'autre part, *les axes sont parallèles aux bissectrices des angles que le diamètre forme avec la normale.*

Si donc nous nous donnons le diamètre OM d'une des hyperboles équilatères considérées en O (*fig.* 2),

Fig. 2.



nous n'avons qu'à projeter en M sur ce diamètre le symétrique D du centre de courbure C par rapport à O pour avoir le centre de cette hyperbole. Le lieu de ce centre est donc le cercle décrit sur OD comme diamètre, résultat connu (2).

Menant par M les parallèles MP et MP′ aux bissectrices des angles que OM fait avec OD, on a les axes. Ces axes ont évidemment pour enveloppe une seule et même courbe, car, si le point M fait le tour complet du

(1) J'ai obtenu ce théorème dans ma Note *Sur les transformations centrales des courbures planes* (n° 9) (*Mathesis*, 1884). J'ai fait voir dans mon *Cours de Géometrie infinitésimale*, p. 281, qu'il résulte immédiatement de la construction de M. Mannheim.

(2) TISSERAND, *loc. cit.*, p. 72.

cercle, le point Q vient en Q'. Cherchons les points P et P' où ces axes touchent cette enveloppe. Pour cela, appelant encore θ l'angle DOM, remarquons que

$$\mathrm{DIM} = 2\theta.$$

Dès lors

$$d(\mathrm{M}) = 2\mathrm{MI}.d\theta.$$

Mais si la normale MI, au lieu que décrit M, coupe en m la normale Pm à l'enveloppe de MP, on a, en remarquant que PM fait avec OD l'angle $\frac{\theta}{2}$,

$$d(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}m}{2}\,d\theta.$$

Il résulte de là que

$$\mathrm{M}m = 4\mathrm{MI},$$

ou, si H est la projection de I sur MP,

$$\mathrm{MP} = 4\mathrm{MH},$$

ou encore, si MP rencontre le cercle en Q,

$$\mathrm{MP} = 2\mathrm{MQ}.$$

De même, le second axe touche l'enveloppe au point P', tel que

$$\mathrm{MP}' = 2\mathrm{MQ}'.$$

D'ailleurs, il est évident que la normale à l'enveloppe de ce second axe passe aussi par le point m.

J'ai déjà eu l'occasion de rencontrer cette courbe (*Journ. de Math. spéc.*, 2e série, t. V, p. 81; 1886) et j'ai fait voir que c'est une hypocycloïde à trois rebroussements engendrée par un cercle de rayon R roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon 3R.

Si p est le centre de courbure de l'enveloppe répondant au point P, le point Q étant le milieu de MP, le point q est de même le milieu de mp.

Or, les droites MQ et MQ' étant rectangulaires, la droite QQ′ passe par le centre I du cercle, et comme on a

$$\frac{qp}{mq} = 1 = \frac{Q'P'}{MQ'},$$

il en résulte que les points p et P′ sont en ligne droite avec le centre I. De même pour les points p' et P.

Ainsi *les centres de courbure p et p' répondant aux points* P *et* P′ *sont respectivement sur les droites* IP′ *et* IP.

Remarquons que l'on a aussi

$$\frac{Ip}{IP'} = \frac{Im}{IM} = -3.$$

L'enveloppe des axes est donc homothétique à sa développée par rapport à I.

3. S'il s'agit de construire soit la parabole, soit l'hyperbole équilatère osculatrice en O, c'est-à-dire ayant en ce point un *contact du troisième ordre* avec la courbe donnée, il faut connaître le centre de courbure C_1 de la développée de cette courbe correspondant au point C.

D'après un théorème connu de Maclaurin ([1]), il suffit de prolonger C_1C (dans le sens de C_1 vers C) du tiers de sa longueur, et de joindre le point γ ainsi obtenu au point O, pour obtenir le diamètre de toute conique admettant pour centres des deux premières courbures les points C et C_1.

Dès lors, si l'on prend cette direction $O\gamma$ pour la droite OM du n° 1, on en déduit l'axe de la parabole osculatrice qui se trouve déterminée par son axe, un de ses points et la tangente en ce point; construction connue.

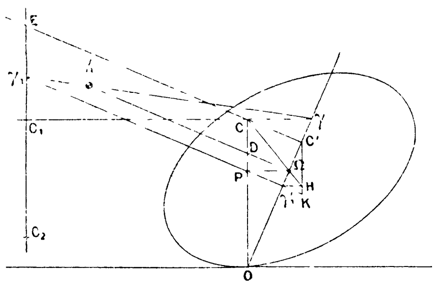
([1]) J'ai donné une démonstration géométrique de ce théorème dans le *Bulletin de la Soc. Math. de France* (t. XX, p. 59).

Si l'on prend la direction $O\gamma$ pour la droite OM du n° 2, on en déduit le centre et les axes de l'hyperbole équilatère osculatrice qui se trouve déterminée par ses asymptotes, bissectrices des angles de ses axes, un de ses points et la tangente en ce point, construction également connue ([1]).

4. Proposons-nous enfin de construire la conique osculatrice à une courbe donnée en un point donné, c'est-à-dire ayant avec cette courbe un *contact du quatrième ordre.*

Pour cela, établissons, à titre de lemme, la relation qui existe entre le centre de troisième courbure C_2 et le centre Ω de la conique.

Fig. 3.



Nous venons de voir que, si C_1 est le centre de seconde courbure et si la normale CC_1 à la première développée rencontre le diamètre $O\Omega$ en γ, on a

$$\gamma C = \frac{CC_1}{3}.$$

Dès lors, si la normale à la courbe lieu du point γ

([1]) Pour ces constructions, *voir* mon *Cours*, p. 41 et 42.

(*lorsque le point* O *décrit la conique*) rencontre la normale C_1C_2 à la seconde développée au point γ_1, on a

$$\gamma_1 C_1 = \frac{C_1 C_2}{3}.$$

Cela posé, on a, dans le triangle $OC\gamma$, en appelant D et k les points où les normales en O et γ à la conique (O) et à la courbe (γ) rencontrent la normale à l'enveloppe de $O\gamma$, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée à ce diamètre par le centre Ω,

$$\frac{d(O)}{d(C)} = \frac{OC}{CC_1}, \qquad \frac{d(C)}{d(\gamma)} = \frac{CC_1}{\gamma\gamma_1}, \qquad \frac{d(\gamma)}{d(O)} = \frac{\gamma k}{OD}.$$

On tire de là, en multipliant membre à membre,

$$\frac{OC}{OD} = \frac{\gamma\gamma_1}{\gamma k}.$$

Donc, si C' et γ'_1 sont les projections de C et γ sur $O\Omega$,

$$\frac{OC'}{O\Omega} = \frac{\gamma\gamma'_1}{\gamma\Omega}.$$

Il résulte de là que *les parallèles à* OC *et* γC, *menées respectivement par* C' *et par* γ'_1, *se coupent en* H *sur la droite* CΩ (¹).

De là la construction du centre Ω, lorsque les centres des trois premières courbures C, C_1, C_2 sont donnés :

Prolonger C_1C *et* C_2C_1 *du tiers de leur longueur en* $C\gamma$ *et* $C_1\gamma_1$; *projeter* γ_1 *et* C *en* γ'_1 *et* C' *sur* $O\gamma$, *et tirer par* γ'_1 *et* C' *des parallèles respectivement à* $C\gamma$ *et à* CO, *qui se coupent en* H. *La droite* CH *rencontre* $O\gamma$ *au centre* Ω *demandé.*

On est, dès lors, ramené à ce problème : *Construire*

(¹) Comparer : *Cours de Géométrie descriptive* de M. Mannheim, 2ᵉ édit., p. 208.

la conique (O), *qui passe au point* O *où son centre de courbure est* C *et qui admet pour centre le point* Ω.

Le problème sera résolu si nous connaissons la longueur du diamètre conjugué de ΩO, dirigé suivant la perpendiculaire ΩP abaissée du centre Ω sur la normale OC.

Or, on sait [1] que *la longueur de ce demi-diamètre conjugué est la moyenne géométrique de* OP *et de* OC.

Si les segments OP et OC sont de même sens, ce demi-diamètre est réel, la conique osculatrice est une ellipse, et l'on est finalement ramené à ce problème bien connu : construire une ellipse connaissant un système de deux diamètres conjugués.

Si les segments OP et OC sont de sens contraires, ce demi-diamètre est imaginaire, et la conique osculatrice est une hyperbole; mais la moyenne géométrique des valeurs absolues de OP et de OC donne le demi-diamètre de l'hyperbole complémentaire dirigé suivant OP, et l'on est ramené à un problème non moins connu que le précédent.

5. Soient K le point où C'H rencontre $\gamma_1\gamma'_1$, E le point où CC' rencontre $C_1\gamma_1$. On a

$$(1) \qquad C_1\gamma_1 = C_1E - \gamma_1E.$$

Or, si l'on appelle ρ, ρ_1, ρ_2 les rayons OC, CC_1, CC_2,

---

[1] Ce théoreme est une conséquence immédiate d'un théorème de Chasles qui peut s'énoncer ainsi : *Si sur la normale en un point* O *d'une conique on porte de part et d'autre de ce point des segments égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit en* O, *les extrémités de ces segments sont conjuguées harmoniques par rapport au centre de courbure* C *répondant au point* O *et à la projection* P *du centre* Ω *sur la normale* OC.

Je suis, de mon côté, parvenu à ce théorème par une voie tout élémentaire (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIX, p. 269; 1880).

on a

$$C_1\gamma_1 = \frac{C_2C_1}{3} = \frac{\rho_2}{3}. \tag{2}$$

En outre,

$$\frac{C_1E}{CC_1} = \frac{C\gamma}{OC},$$

d'où

$$C_1E = \frac{CC_1 . C\gamma}{OC} = \frac{\rho_1^2}{3\rho}, \tag{3}$$

et

$$\frac{C'K}{C'\gamma'_1} = \frac{O\gamma}{OC},$$

d'où

$$C'K = \frac{C'\gamma'_1 . O\gamma}{OC}.$$

Mais

$$\frac{C'\gamma'_1}{O\gamma} = \frac{C'H}{OC} = \frac{\Omega C'}{\Omega O}.$$

Si donc nous représentons par λ *le rapport* $\frac{\Omega C'}{\Omega O}$ *pris avec son signe, nous avons*

$$C'\gamma'_1 = \lambda O\gamma.$$

Par suite,

$$C'K = \frac{\lambda \overline{O\gamma}^2}{OC} = \frac{\lambda}{\rho}\left(\rho^2 + \frac{\rho_1^2}{9}\right)$$

et

$$\gamma_1 E = - C'K = -\lambda\left(\rho + \frac{\rho_1^2}{9\rho}\right). \tag{4}$$

Remplaçant, dans (1), $C_1\gamma_1$, C_1E et γ_1E par leurs valeurs (2), (3), (4), on obtient

$$\rho_2 = \frac{\rho_1^2}{\rho} + \lambda\left(3\rho + \frac{\rho_1^2}{3\rho}\right).$$

Si la conique osculatrice est une parabole $\lambda = 1$ et

$$\rho_2 = 3\rho + \frac{4\rho_1^2}{3\rho}.$$

Cette formule peut s'interpréter géométriquement comme suit (1) : *Soient* I *le point obtenu en prolongeant la normale* OC *vers l'extérieur de la courbe de la quantité* $OI = \frac{\rho}{2}$, *et* S *le symétrique du centre de seconde courbure* C_1 *par rapport à* I. *La perpendiculaire élevée en* S *à* C_1S *passe par le centre de troisième courbure* C_2.

Lorsque cette condition est vérifiée, il existe donc au point O une parabole ayant avec la courbe un contact du quatrième ordre, c'est-à-dire une *parabole surosculatrice*.