C. BOURLET

Exercices de licence

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 236-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__236_0>

EXERCICES DE LICENCE;

PAR M. C. BOURLET.

I. $f(z)$ désignant une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour fermé simple C, et a et b deux nombres dont les affixes sont situées à l'intérieur du contour C, démontrer que l'on a

$$\int_a^b f(z)\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,\mathcal{L}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)dz;$$

l'intégrale du premier membre étant prise le long d'un chemin allant de a en b à l'intérieur du contour C et celle du second membre étant prise le long de ce contour C, dans le sens positif.

II. $u(z)$ désignant une fonction de la variable imaginaire z, régulière à l'intérieur d'un cercle C ayant l'origine O pour centre, et z désignant un point quelconque situé à l'intérieur de ce cercle, démontrer que, si l'on pose

$$u_{-1} = \int_0^z u(z)\,dz,$$

$$u_{-2} = \int_0^z u_{-1}\,dz,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$u_{-p} = \int_0^z u_{-(p-1)}\,dz,$$

ces intégrales étant prises le long de chemins situés à l'intérieur du cercle C, on a

$$u_{-p} = \frac{1}{(p-1)!}\left[\frac{1}{p}x^p u - \frac{1}{p+1}\frac{x^{p+1}}{1}\frac{du}{dz} + \ldots + (-1)^m \frac{1}{m+p}\frac{x^{m+p}}{m!}\frac{d^m u}{dz^m} + \ldots\right].$$

III. $\mathrm{P}(x)$ étant un polynome entier de degré m, démontrer que l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\mathrm{P}^{(m)}(kx)}{m!}\frac{d^m y}{dx^m} + \frac{\mathrm{P}^{(m-1)}(kx)}{(m-1)!}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{P}'(kx)}{1!}\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}(kx)y = 0,$$

où k désigne une constante et $\mathrm{P}'(x)$, $\mathrm{P}''(x)$, ..., $\mathrm{P}^{(m)}(x)$ les dérivées de $\mathrm{P}(x)$, se ramène à une équation linéaire à coefficients constants, en z, en posant

$$y = ze^{-\frac{kx^2}{2}}.$$