Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 185-196

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__185_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1696.

(1895, p. 37.)

Le triangle $A_1B_1C_1$ *étant inscrit homologiquement dans* ABC, *si l'on mène par* A *une droite quelconque rencontrant* A_1C_1 *en* B_2 *et* A_1B_1 *en* C_2 :

1° *Les droites* BC_2 *et* B_2C *se coupent en* A_2 *sur* B_1C_1;

2° *Les trois triangles* ABC, $A_1B_1C_1$ *et* $A_2B_2C_2$ *sont homologiques deux à deux, ou l'on a*

$$(\text{centre } O)\left|\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right|(\text{axe } \chi),$$

$$O_1\left|\begin{matrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right|\chi_1, \qquad O_2\left|\begin{matrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{matrix}\right|\chi_2.$$

3° *Les centres* O, O_1, O_2 *appartiennent respectivement aux axes* χ_1, χ_2, χ;

4° *Il existe trois coniques :*

La première tangente aux côtés de ABC *en* A_1, B_1, C_1 *et à* χ_1 *en* O.

La deuxième tangente aux côtés de $A_1B_1C_1$ *en* A_2, B_2, C_2 *et à* χ_2 *en* O_1.

La troisième tangente aux côtés de $A_2B_2C_2$ *en* A, B, C *et à* χ *en* O_2. (P. Sondat).

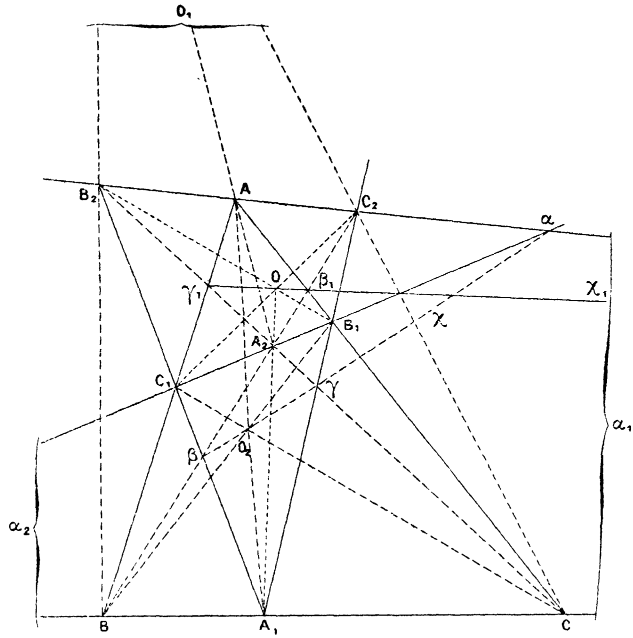
SOLUTION

Par M. A. Droz-Farny.

1° $B_1ACB_2A_1C_2$ est un hexagone inscrit dans une conique dégénérée; sa pascale étant $C_1B_1A_2$, ces trois points sont en ligne droite.

2° et 3° Représentons par α le point de coupe des côtés B_1C_1 et B_2C_2, par α_1 celui des côtés BC et B_2C_2, par α_2 celui de BC et B_1C_1 et soient de même les points β, β_1 et β_2, γ, γ_1 et γ_2 pour les intersections des autres paires de côtés.

La ponctuelle $A_1 \beta C_1 B_2$ est en perspective avec $A_1 C_2 B_1 \gamma$ par rapport au centre A_2; donc aussi $(A_1 \beta C_1 B_2) = (A_1 \gamma B_1 C_2)$.



Ces deux ponctuelles homographiques ayant le point A_1 commun sont perspectives : les trois droites $\beta\gamma$, C_1B_1, B_2C_2 se croisent en α. Les deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont donc homologiques d'axe $\alpha\beta\gamma = \chi$ et par conséquent A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 concourent au point O.

$C_1CA_2BB_1A$ est un hexagone inscrit dans une conique dégénérée; sa pascale étant

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
C_1A_1 & \beta & C_1C & O_2 & B_1A_1 & \gamma, \\
A_2B & & B_1B & & A_2C &
\end{array}$$

O_2 se trouve sur $\beta\gamma$ ou sur l'axe χ.

Les ponctuelles α_2BA_1C et $A_2BC_2\beta_1$ sont perspectives de centre B_1, de même α_2BA_1C et $B_2\gamma_1B_2C$ sont perspectives de centre C_1, donc

$$(A_2BC_2\beta_1) = (A_2\gamma_1B^2C),$$

ou

$$(A_2BC_2\beta_1) = (A_2CB_2\gamma_1).$$

Ces deux ponctuelles ayant le point A_2 en commun sont homologiques; donc : BC, B_2C_2, $\beta_1\gamma_1$ se croisent en α_1.

Les deux triangles ABC et $A_2B_2C_2$ sont donc homologiques d'axe $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \chi_1$. Les trois droites AA_2, BB_2, CC_2 concourent donc en O_1, $B_2A_2C_2C_1AB_1$ est un hexagone inscrit dans une conique dégénérée ; sa pascale est $\beta_1\gamma_1O$; donc O se trouve sur l'axe χ_1.

Enfin $BACC_2A_1B_2$ est aussi un hexagone inscrit, dont la pascale est $O_1\beta_2\gamma_2$; O_1 se trouve sur l'axe χ_2.

4° Le triangle $A_1B_1C_1$ étant inscrit homologiquement dans ABC il existe une conique touchant les côtés de ABC en A_1, B_1, C_1. Mais on voit que, dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, les diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés se croisent en un même point; appliquons la réciproque de ce théorème au quadrilatère $\beta_1\gamma_1BC$ dans lequel γ_1C, β_1B, OA_1 et B_1C_1 se croisent en A_2 et l'on verra que la conique $A_1B_1C_1$ touche aussi l'axe χ_1 en O.

Même démonstration pour les deux autres coniques.

Autres solutions de MM. A. Dardès et G. Gallucci.

Question 1717.

(1896, p. 104).

Le lieu des milieux des cordes d'un cercle ayant une projection donnée sur un diamètre fixe est une quartique. Discuter cette courbe; la construire, en étant donnés deux points, et donner la construction de la tangente en un point quelconque. (Gallucci).

SOLUTION SOMMAIRE
Par M. A. Mannheim.

Sur le diamètre fixe D prenons un segment dont la longueur soit la longueur donnée de la projection d'une quelconque des cordes; de ses extrémités élevons des perpendiculaires à D.

Ces droites coupent le cercle en quatre points, les cordes qui les joignent deux à deux ont pour milieux des points du lieu demandé. Ces points, sur une même perpendiculaire à D, sont au nombre de quatre, et comme il n'y a pas d'autre point du lieu sur cette perpendiculaire, *le lieu est une quartique.*

Prenons une des cordes ab et m son milieu. Des extrémités de cette corde menons des tangentes au cercle. Du point de rencontre de ces tangentes abaissons une perpendiculaire sur D. Cette droite coupe ab au point c. En vertu d'une propriété due à M. R. Godefroy, le symétrique de c par rapport à m est le point où ab touche la courbe E à laquelle toutes les cordes analogues à ab sont tangentes.

Comme le lieu (m) des points tels que m est la podaire de E par rapport au centre o du cercle donné, il résulte tout de suite de là que :

La tangente à (m) *en* m *est la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite* oc.

Sur D prenons les projections orthogonales α, μ, β des points a, m, b. Désignons oa par r, om par ρ, $\alpha\beta$ par $2l$ et l'angle μom par ω. On a

$$\mu\alpha = ma \sin\omega,$$

d'où

$$l^2 = (r^2 - \rho^2)\sin^2\omega,$$

l'équation de (m) en coordonnées polaires est donc

$$\rho^2 + \frac{l^2}{\sin^2\omega} = r^2;$$

par suite en coordonnées rectangulaires (m) a pour équation

$$(x^2 + y^2)y^2 + l^2x^2 - (r^2 - y^2)y^2 = 0.$$

Avec ce qui précède, il est très facile de déterminer la forme de la courbe (m). (Nous n'avons pas compris ce que veut dire : la construire, en étant donnés deux points.)

Autre solution par M. G. Gallucci.

Question 1719.

(1896, p. 151).

Si deux triangles homologiques ABC, $A_1B_1C_1$ *sont inscrits dans la même conique* Q : 1° *Le centre d'homologie* O *est le pôle de l'axe* X ; 2° *Les points* (BC_1, B_1C), (AC_1, A_1C), (AB_1, A_1B) *appartiennent à* X *et les droites* (bc_1, b_1c), (ac_1, a_1c), (ab_1, a_1b) *passent en* O ; 3° *Si par* O *l'on mène une sécante* Δ, *les droites joignant les sommets de chacun des triangles aux points où les côtés correspondants de l'autre sont coupés par* Δ *sont trois à trois concourantes en deux points* ω, ω_1 *de* Q *et ces deux points sont en ligne droite avec* O ; 4° *Les droites joignant un point* θ *de* X *aux sommets de chacun des triangles coupent les côtés correspondants de l'autre en des points situés trois à trois sur deux droites* ρ, ρ_1 *tangentes à la conique* Q_1 *inscrite aux deux triangles, et ces deux droites se coupent sur* X.

5° *Déduire de là une construction simple de la conique passant par cinq points ou tangente à cinq droites.*

(P. Sondat).

SOLUTION

Par M. R. Gilbert.

1° Les points (BC, B_1C_1), (AC, A_1C_1), (AB, A_1B_1) situés sur X ont tous trois leurs polaires passant en O ; donc X est la polaire de O.

2° Le point (BC_1, B_1C) ayant également une polaire qui passe en O, ce point est sur X. Propriété corrélative, O étant aussi le pôle de X par rapport à Q_1.

3° Prenons un point ω sur Q ; les droites ωA, ωB, ωC rencontrent a_1, b_1, c_1 en α, β, γ ; je dis que α, β, γ sont sur une droite passant en O ; il suffit de montrer que O est sur αβ. Or faisons varier ω sur Q ; α, β décrivent sur a_1, b_1 deux divisions homographiques. Mais, lorsque ω vient en C_1, α et β sont confondus en C_1 ; donc αβ passe par un point fixe. Or, lorsque ω vient en A_1, α est sur AA_1 et β en A_1 : donc αβ est AA_1 ; de même, une position de αβ est BB_1 : donc O est bien sur αβ. Inversement, considérons une droite Δ coupant a_1, b_1, c_1 en α, β, γ ; la droite Aα coupe Q en ω, auquel point ω correspondent les mêmes points β, γ : donc $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en ω. De même, $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$ concourent en ω_1. A un point ω correspond une seule droite Δ et un seul point ω_1, et inversement; donc les faisceaux $O\omega$, $O\omega_1$ sont homographiques; or, lorsque ω est en A, on voit que β se confond avec γ_1 en $(b_1 c)$, γ avec β_1 en $(c_1 b)$ (accessoirement, cela démontre 2°) et par suite, ω_1 est en A_1 : donc les faisceaux, qui d'ailleurs sont réciproques et par suite en involution, ont trois rayons communs et coïncident.

4° Proposition corrélative; même démonstration.

5° On donne les cinq points A, B, C, A_1, B_1; d'où le point O. Les droites c, c_1 et AB_1, A_1B se coupent sur X; d'où C_1. Pour construire un point quelconque, on mène une droite Δ à laquelle correspond un point ω et un point ω_1. La tangente en un point M quelconque s'obtient en considérant les deux triangles MAB, $M_1A_1B_1$, le point ω étant en M.

Autres solutions de MM. G. Gallucci et V. Retali.

Question 1720.

(1896, p. 152.)

On sait que, dans un triangle quelconque, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont en ligne droite. Étant donné un triangle Δ, on construit la droite dont il vient d'être question, relative à chacun des triangles formés par les points de contact du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits à Δ. Démontrer que les quatre droites ainsi obtenues se coupent au centre du cercle circonscrit à Δ. (J. Franel).

PREMIÈRE SOLUTION.

Par M. F. Farjon.

Appelons L la droite qui dans un triangle joint l'orthocentre au centre du cercle circonscrit. L'un des triangles considérés, inscrit dans le cercle de centre O, et le triangle qui a pour sommets les trois autres points de concours des bissectrices de Δ, sont homothétiques; leurs lignes L sont donc parallèles; de plus elles coïncident, ayant en commun le point O, centre du cercle circonscrit au premier triangle et orthocentre du second. Or les quatre triangles ayant pour sommets les points de concours des bissectrices de Δ pris trois à trois, ont un même cercle de neuf points dont le centre est sur chacune des lignes L considérées, lequel cercle n'est autre que le cercle circonscrit à Δ. Donc, etc.

DEUXIÈME SOLUTION.

Par M. E. Duporcq.

Soit δ un des quatre triangles considérés dans l'énoncé; soient h son orthocentre et ω le centre du cercle qui lui est circonscrit. Il existe, comme on sait, une conique Γ, admettant pour foyers h et ω, et inscrite au triangle δ. Par polaires réciproques relativement au cercle Ω, la conique Γ se transforme en une circonférence dont le centre est sur la droite $h\omega$, axe de Γ : or cette transformée n'est autre que le cercle circonscrit au triangle Δ, dont les sommets sont, par rapport au cercle Ω, les pôles des côtés du triangle δ. Le théorème se trouve donc démontré.

Autres solutions de MM. A. Droz-Farny et H. Lez.

Question 1724.

(1896, p. 200.)

Démontrer l'identité

$$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a & (a-1) & \dots & (a-n) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1^n 2^{n-1} 3^{n-2} \dots (n-2)^3 (n-1)^2 n.$$

(V. de Strékalof.)

SOLUTION

Par M. V. Retali.

Appelons Δ le déterminant donné, et posons $a - r = a_r$; nous avons $a_r - a_s = s - r$,

$$\Delta' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & a_1 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^n & a_1^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

d'où, par le théorème de Vandermonde,

$$\Delta' = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{array}{l}(a-a_1)\ldots(a-a_{n-1})(a-a_n)\\ (a_1-a_2)\ldots(a_1-a_{n-1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (a_{n-1}-a_n),\end{array} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!(n-1)!\ldots 1!,$$

$$\Delta = n!\,(n-1)!\ldots 1!$$

Autres solutions par MM. Audibert, L. Bosi, Brand, Emine, G. Tzitzeica.

Questions 1725 et 1726.

(1896, p. 200.)

1725. *Si m et n sont deux nombres premiers,*

$$m^{n-1} + n^{m-1} - 1$$

est divisible par mn. (J.-J. Milne.)

1726. *Si m, n et p sont trois nombres premiers,*

$$(np)^{m-1} + (pm)^{n-1} + (mn)^{p-1} - 1$$

est divisible par mnp. (J.-J. Milne.)

SOLUTION

Par M. G. Tzitzeica.

1725. Comme m et n sont premiers, il suffit de montrer que le nombre proposé est divisible par m et n séparément. Or cela est évident, en vertu du théorème de Fermat.

1726. Évidente aussi, d'après le même théorème.

Autres solutions de MM. Audibert, Émine et P. H.

Question 1728.

(1896, p. 248.)

Si p est un nombre premier qui ne divise pas x et r un nombre entier quelconque, l'expression $x^{p^r - p^{r-1}} - 1$ est divisible par p. (J.-J. Milne.)

SOLUTION

Par M. ÉMINE.

En effet, l'expression proposée peut s'écrire

$$\left(x^{p^{r-1}}\right)^{p-1} - 1,$$

du moment que x n'a pas le facteur premier p; toutes ses puissances aussi ne l'auront pas. Donc $x^{p^{r-1}}$ n'étant pas divisible par le nombre premier p, d'après le théorème de Fermat, on aura

$$\left(x^{p^{r-1}}\right)^{p-1} - 1 = \mathrm{M}p.$$

Autres solutions de MM. P. H. et G. TZITZÉICA.

Questions 1736 et 1737.

(1896, p. 344.)

Ces deux questions, dont les énoncés déjà anciens se trouvaient dans les archives des *N. A.*, ont été posées sous la signature Wolstenholme, et résolues dans le *J. E.* de M. de Longchamps (1882, p. 95 et p. 189). Il n'en sera donc pas inséré de solutions. Si nous avions connu le fait, nous n'aurions pas publié les énoncés dont il s'agit. LA RÉDACTION.

Question 1743.

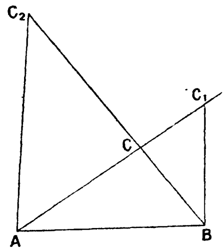
(1896, p. 440.)

On peut construire six triangles semblables entre eux ayant pour côté commun un segment fixe, et situés d'un même côté de ce segment : les six sommets ainsi obtenus sont sur une même circonférence. Toutes les circonférences ainsi obtenues ont un même axe radical. (E. DUPORCQ.)

SOLUTION

Par M. DULIMBERT.

Soient AB le segment fixe, C un point quelconque du plan. Sur le côté AC, je prends un point C_1 tel que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}.\overline{AC_1}$. J'ai un deuxième triangle C_1AB semblable au premier, AB étant homologue de AC_1. Sur le côté BC, je prends un point C_2 tel que $\overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BC_2}$. J'obtiens ainsi un troisième triangle C_2AB semblable aux deux autres, AB étant homologue de BC_2. Les **trois** autres triangles, de sommets C', C'_1



et C'_2, sont symétriques des trois premiers par rapport à la perpendiculaire au milieu de AB. Pour démontrer que le cercle CC_1C_2 passe par les points C', C'_1, C'_2, il suffit de démontrer que son centre est sur cette perpendiculaire.

Je prends AB pour axe des x, l'axe des y passant par C et perpendiculaire sur AB; je désigne par h l'ordonnée du point C, par a et b les abscisses des points A et B. J'ai d'abord

$$\frac{AB}{AC_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AB_1}$$

ou

$$\frac{a-b}{AC_1} = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{BC_1} = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a-b},$$

d'où

$$AC_1 = \frac{(a-b)^2}{\sqrt{a^2+h^2}}, \qquad BC_1 = \frac{(a-b)\sqrt{b^2+h^2}}{a^2+h^2}.$$

Les coordonnées x, y du point C s'obtiennent par les proportions

$$\frac{a-x_1}{a} = \frac{(a-b)^2}{a^2+h^2}, \qquad \frac{y_1}{h} = \frac{(a-b)^2}{a^2+h^2},$$

d'où

$$x_1 = \frac{a[a^2+h^2-(a-b)^2]}{a^2+h^2},$$

$$y_1 = \frac{h(a-b)^2}{a^2+h^2}.$$

La perpendiculaire au milieu de CC_1 a donc pour équation

$$h^2 - 2hy = -\frac{2ax[a^2+h^2-(a-b)^2]}{a^2+h^2}$$
$$+\frac{a^2[a^2+h^2-(a-b)^2]^2}{(a^2+h^2)^2}$$
$$-\frac{2hy(a-b)^2}{a^2+h^2}+\frac{h^2(a-b)^4}{(a^2+h^2)^2},$$

ou, en ordonnant et supprimant le facteur

$$(a^2+h^2)[a^2+h^2-(a-b)^2],$$
$$2ax - 2hy + b^2 + h^2 - 2ab = 0.$$

De même la perpendiculaire au milieu de CC_2 a pour équation

$$2bx - 2hy + a^2 + h^2 - 2ab = 0.$$

Les coordonnées du centre du cercle sont donc

$$x = \frac{a+b}{2},$$

ce qui démontre la première partie du théorème, et

$$y = \frac{a^2 - ab + b^2 + h^2}{2h}.$$

L'équation du cercle est

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a^2 - ab + b^2 + h^2}{2h}\right)^2$$
$$= \frac{(a+b)^2}{4} + \left(h - \frac{a^2 - ab + b^2 + h^2}{2h}\right)^2.$$

Supposons maintenant que le point C varie, A et B restant fixes. L'équation du cercle devient, en transportant l'origine au point O, milieu de AB,

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{h}(a^2 - ab + b^2 + h^2)$$
$$-\frac{(a+b)^2}{4} + a^2 - ab + b^2 = 0.$$

h est arbitraire, la différence $a-b$ est constante et égale à la distance $AB = 2l$. Posons $a+b = 2s$ et faisons $y = 0$. Alors

$$x^2 - s^2 + 4l^2 + s^2 - l^2 = 0.$$

ou

$$x^2 + 3l^2 = 0,$$

ce qui montre que AB est l'axe radical commun de ces cercles. Il en résulte aussi que tous ces cercles sont orthogonaux au cercle qui a le point O pour centre et pour rayon $l\sqrt{3}$ (1).

Autres solutions de MM. BARISIEN, BRAND, FARJON, LEMOINE, PROVOST, V. RETALI, TARATTE.