A. BOULANGER

Sur le biais passé gauche

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 171-176

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__171_1>

[K22d]

SUR LE BIAIS PASSÉ GAUCHE;

PAR M. A. BOULANGER,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Je me propose de résoudre deux problèmes relatifs à cette surface bien connue (*voir*, par exemple, MANNHEIM, *Cours de Géométrie descriptive,* 30e Leçon).

I. — *Détermination du volume limité par le biais, par les murs de tête et par le plan des naissances.*

Ce volume est limité par deux bases parallèles semi-circulaires et latéralement par des portions de surfaces gauches; il est donc donné par la formule

$$V = \frac{h}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3),$$

où S_1 et S_2 sont les aires des bases semi-circulaires, h leur distance et S_3 l'aire de la section faite à égale distance des deux bases (APPELL, *Mécanique rationnelle,* 7e Leçon autographiée).

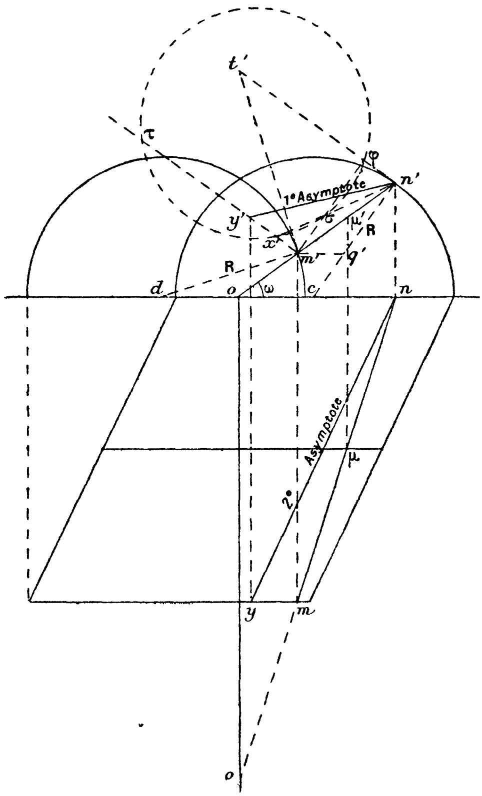
On a

$$S_1 = S_2 = \frac{\pi R^2}{2},$$

en désignant par R le rayon des cercles directeurs.

La question est de calculer S_3. Soit $(omn, o'm'n')$ une

Fig. 1.



génératrice de la surface; elle coupe le plan moyen au point (μ, μ'). Cherchons le lieu du point μ'.

Soit $o'\mu' = \rho$, $\widehat{\mu' o' n'} = \omega$; c étant la distance commune des centres des cercles à la directrice rectiligne, on a

$$2\rho = o'm' + o'n',$$

$$R^2 = c^2 + \overline{o'm'}^2 - 2c.o'm'\cos\omega,$$

$$R^2 = c^2 + \overline{o'n'}^2 + 2c.o'n'\cos\omega.$$

L'élimination de $\overline{o'm'}$ et de $\overline{o'n'}$ entre ces trois relations donne sans difficulté

$$\rho^2 = R^2 - c^2\sin^2\omega.$$

La section moyenne est donc une quartique bicirculaire unicursale, *indépendante de l'écartement des bases;* sa surface au-dessus du plan des naissances est

$$S_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - c^2\sin^2\omega)\,d\omega$$

ou

$$S^3 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2R^2 - c^2) + c^2\cos 2\omega]\,d\omega = \frac{\pi}{4}(2R^2 - c^2).$$

Par suite,

$$V = \frac{\pi h}{6}[3R^2 - c^2].$$

C'est cette formule simple que je voulais signaler.

II. — *Détermination graphique de l'indicatrice en un point* P *de la surface du biais.*

La génératrice G du point P est une première asymptote de l'indicatrice; la seconde asymptote est la génératrice (autre que G) de l'hyperboloïde osculateur au biais le long de G, et il suffit, pour déterminer cet hyperboloïde, d'avoir les asymptotes relatives à trois points; par exemple, aux points de rencontre de G avec les directrices M, N, O.

Au point O, la seconde asymptote de l'indicatrice est évidemment la directrice rectiligne.

Passons au point N, par exemple. D'après le théorème des tangentes conjuguées de Dupin, quand le point N se déplace sur le cercle de tête, la caractéristique Γ du plan tangent en N est conjuguée, par rapport aux asymptotes de l'indicatrice, de la direction NT du déplacement de N. Donc, l'asymptote demandée sera (en projection comme dans l'espace) la quatrième droite du faisceau harmonique formé par les droites NT, G et Γ.

Par suite, il suffira de construire la caractéristique Γ et, à cet effet, de déterminer le point X où la trace du plan tangent en N au biais, sur le plan de la seconde directrice circulaire par exemple, touche son enveloppe. Cette trace est la parallèle à NT menée par N. Les cercles de tête étant de front, la question est ramenée au problème de Géométrie plane suivant :

Par le milieu o' de la droite des centres de deux circonférences égales (*fig.* 1), on mène une droite $o'm'n'$ coupant ces circonférences en m' et n' (d'un même côté de o'). Par m', on mène une parallèle à la tangente $n't'$ au cercle rencontré en n'. Quel est le point de contact x' de cette parallèle avec son enveloppe, quand la sécante $o'm'n'$ pivote?

Supposant même qu'il s'agisse de deux courbes quelconques, soit $o'm'_1 n'_1$ un rayon vecteur infiniment voisin de $o'm'n'$ (*fig.* 2). La parallèle à la tangente en n_1 rencontre en ξ la droite relative à m'. Il faut trouver la limite x' du point ξ.

ε étant l'angle de contingence de la courbe (n'), le triangle $\xi m' m'_1$ donne

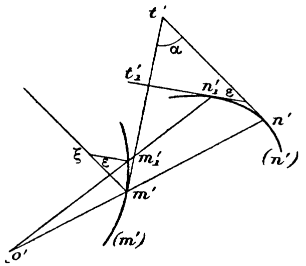
$$m'\xi = \frac{m' m'_1}{\sin \varepsilon} \times \sin \widehat{\xi m'_1 m'}.$$

On en déduit

$$m' x' = \frac{d(m')}{d(n')} r \sin \alpha,$$

en désignant par r le rayon de courbure de (n') en n', par α l'angle des tangentes en m' et n' à (m') et (n'),

Fig. 1.



par $d(m')$ et $d(n')$ les différentielles des arcs de ces courbes. Or, d'après la formule de Newton (*voir* Bour, *Cinématique*, p. 58), on a

$$\frac{d(m')}{d(n')} = \frac{o' m' \times t' m'}{o' n' \times t' n'}.$$

Donc, enfin,

$$m' x' = t' m' \sin \alpha \times \frac{o' m'}{o' n'} r \times \frac{1}{t' n'}.$$

De là résulte, dans le cas qui nous occupe, la construction suivante (*fig.* 1) :

Par m', on mène l'horizontale $m'q'$ jusqu'à sa rencontre q' avec le rayon $c'n'$ de n'; on projette m' en φ sur $n't'$; on porte $m'\sigma$ équipollent à $c'q'$ et $m'\tau$ équipol-

lent à $n't'$. Le point x' est déterminé par le cercle circonscrit au triangle $\varphi\sigma\tau$.

En effet,

$$m'\sigma = c'q' = \frac{o'm'}{o'n'} \times r;$$

$$m'\varphi = t'm' \sin\alpha,$$

$$m'\tau = n't',$$

et l'on a

$$m'x' = \frac{m'\sigma \times m'\varphi}{m'\tau}.$$

La seconde asymptote de l'indicatrice s'obtiendra dès lors immédiatement en portant sur la direction $m'\tau$ un segment $x'y'$ égal à $m'x'$, et en rappelant le point y' en y sur le plan de front du point m.

La droite $(ny, n'y')$ est l'asymptote cherchée.

On répéterait la construction pour le point M et, l'hyperboloïde osculateur étant connu, la seconde asymptote en un point quelconque P de G ou OMN, s'obtiendrait par le tracé habituellement employé pour définir le plan tangent en P (Mannheim, *loc. cit.*).