Nouvelles annales de mathématiques

Licence ès sciences mathématiques. Session de novembre 1896. Compositions

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 129-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__129_0>

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SESSION DE NOVEMBRE 1896. — COMPOSITIONS.

Dijon.

Analyse. — I. *Périodes et valeurs diverses de l'intégrale*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}}.$$

II. *Obtenir l'équation finie $y = f(x)$ de la courbe plane dont l'aire comprise entre elle, l'axe des x et les ordonnées d'abscisses* o, x *a pour expression*

$$\left[\frac{y}{\varphi'(x)}\right]^m,$$

m et $\varphi(x)$ représentant un exposant et une fraction de x dérivés tous deux.

En posant

$$\int_0^x y\,dx = u,$$

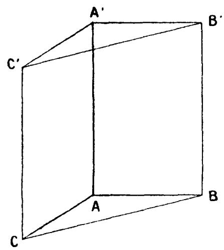
on obtient immédiatement l'équation différentielle

$$u = \left[\frac{\frac{du}{dx}}{\varphi'(x)}\right]^m,$$

dont l'intégration s'opère sans difficulté. Il ne reste plus qu'à déterminer la constante arbitraire (ce qui n'est pas toujours possible), puis à différentier l'expression de u pour arriver à celle de y.

Mécanique. — I. *Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur.*

II. *Un prisme droit homogène, dont les bases sont deux triangles rectangles* ABC, A′B′C′, *repose par la face* ABA′B′ *sur un plan horizontal le long duquel il peut glisser sans frottement. Une tige pesante* MN,



située dans le plan de la section droite du prisme qui contient le centre de gravité, s'appuie, d'une part, sur

le plan horizontal et, d'autre part, sur la face BCB′C′, *et glisse sans frottement à ses deux extrémités.*

On demande le mouvement du système.

La tige pesante est homogène. Dans sa position initiale, son extrémité supérieure est sur l'arête CC′ *et les vitesses initiales sont nulles.*

On applique les théories des forces vives et du mouvement du centre de gravité.

Lyon.

Analyse. — I. *Démontrer que trois surfaces orthogonales se coupent suivant des lignes de courbure.*

II. *Intégrer*

$$pq = px + qy, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Tout se réduit à trouver une intégrale *complète,* c'est-à-dire contenant deux paramètres arbitraires. Si z était une forme quadratique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, il en serait de même encore pour les deux expressions pq et $px + qy$. Poursuivons donc l'identification. Il viendra

$$\begin{aligned} pq &= 4(Ax + By)(Bx + Cy) \\ &= px + qy \\ &= 2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \end{aligned}$$

d'où

$$o = A(2B - 1) = C(2B - 1), \qquad AC = B(1 - B),$$

c'est-à-dire

$$o = A = C, \qquad B = 1 \qquad \text{et} \qquad z = 2xy$$

(solution sans paramètre), ou bien

$$B = \tfrac{1}{2}, \qquad AC = \tfrac{1}{4}.$$

Il vient ainsi l'intégrale complète

$$z = xy + \lambda x^2 + \frac{1}{4\lambda} y^2 + \mu,$$
$$\lambda, \mu = \text{const. arbitr.}$$

L'intégrale générale se construira par les procédés connus.

MÉCANIQUE. — *Un point* M *matériel non pesant est assujetti à se déplacer sans frottement sur un cylindre à section droite elliptique.* M *est attiré vers un point* O, *situé sur l'axe du cylindre, proportionnellement à la distance. Trouver le mouvement.*

Prenons O pour origine des coordonnées rectangulaires et l'axe du cylindre pour axe des z.

Soit A le point où la génératrice de M perce le plan des xy.

Le théorème des aires montre que A décrit la section droite suivant la loi képlérienne (aires proportionnelles aux temps). Projetons maintenant sur l'axe du cylindre, il viendra

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu^2 z, \qquad z = z_0 \cos\mu(t - t_0),$$

$$\mu = \text{const. de l'attraction.}$$

On connaît ainsi comment se déplacent la génératrice variable MA et le point M sur ladite génératrice. La méthode est valable pour une section droite quelconque.

Achevons la solution pour la section droite elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

On a (théorème des aires), $k^2 =$ const. des aires,

$$x\,dy - y\,dx = ab\,d\varphi = k^2\,dt.$$

Si T est le temps d'une révolution complète, $2\pi ab = k^2 T$ et

$$d\varphi = \frac{2\pi}{T}dt, \qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{2\pi}{T}(t - t_0).$$

La trajectoire est définie par les équations

$$\left\{\begin{array}{ll} x = a\cos\varphi, & y = b\sin\varphi, \\ z = z_0\cos\dfrac{\mu T(\varphi - \varphi_0)}{2\pi}, & \dfrac{\varphi - \varphi_0}{2\pi} = \dfrac{t - t_0}{T} \end{array}\right\},$$

z_0, φ_0, T, t_0 dépendant des conditions initiales.

Marseille.

Analyse. — *Pour intégrer le système d'équations différentielles*

$$3x^3\frac{dt_1}{dx} = (-3x^2+5)t_1 - (2x^4+12x^2+5)t_2,$$

$$3x^3\frac{dt_2}{dx} = 5t_1 - 5(3x^2+2)t_2,$$

on fera successivement les changements de variables définis par les relations suivantes :

$$t_1 = z_1 + z_2, \qquad t_2 = z_2; \qquad z_1x^2 = y_1, \qquad z_2x^4 = y_2,$$

et l'on sera ramené à un système d'équations différentielles de forme classique aux variables y_1 et y_2.

On calculera les intégrales y_1 et y_2 qui se réduisent à $y_1 = 0$, $y_2 = -1$ quand on fait $x = 1$.

La variable x décrivant un chemin fermé quelconque allant du point $x = 1$ au même point $x = 1$, quelles sont les différentes valeurs au point $x = 1$ des fonctions y_1 et y_2, z_1 et z_2, t_1 et t_2?

Les changements de variables indiqués conduisent au système de forme classique

$$3x\frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 2y_2,$$

$$3x\frac{dy_2}{dx} = 5y_1 - 3y_2,$$

que l'on intègre en cherchant à déterminer les paramètres définis par

$$y_1 = k_1x^r, \qquad y_2 = k_2x^r.$$

L'équation caractéristique, qui donne r, est

$$9r^2 + 1 = 0,$$

et la solution demandée est

$$y_1 = 2\sin\left(\frac{\log x}{3}\right),$$

$$y_2 = 3\sin\left(\frac{\log x}{3}\right) - \cos\left(\frac{\log x}{3}\right).$$

Le seul point singulier à distance finie est l'origine. Tout chemin fermé allant du point $x = 1$ au point $x = 1$ rentre dans l'une des classes suivantes :

1° S'il n'entoure pas l'origine, y_1 et y_2 reprennent les valeurs o et -1 au point $x = 1$;

2° S'il entoure une ou plusieurs fois, même en tournant dans les deux sens, chaque tour augmente ou diminue l'argument de $\log x$ de 2π, et l'arc soumis au signe sinus augmente ou diminue de $\frac{2\pi}{3}$. Par exemple, trois tours successifs dans le même sens ramènent les valeurs initiales o et -1 de y_1 et de y_2. Il est facile de former toutes les valeurs demandées dans la dernière partie de la question.

MÉCANIQUE. — *Dans un plan horizontal, un tube homogène, de longueur* $6a$, *est mobile autour de son centre* O, *qui est fixe.*

Un point matériel, qui est mobile dans ce tube, est attiré par le point O *proportionnellement à la distance.*

La masse du tube est égale à celle du point.

A l'instant initial, le mobile est à une distance $2a$ *du point* O *et la vitesse relative du mobile sur le tube est nulle.*

La vitesse angulaire du tube est égale à ω.

Étudier le mouvement du système en supposant que l'attraction du point O *sur le mobile à l'unité de distance est égale à* $2m\omega^2$, *où* m *désigne la masse du mobile et* ω *la vitesse angulaire initiale du tube.*

Trouver la pression du point mobile sur le tube, et du tube sur le point O.

En désignant par m la masse commune du tube et du point, le moment d'inertie du tube par rapport au point O est $3ma^2$.

Si l'on applique le théorème des aires et celui des forces vives au mouvement du système, on obtient les deux équations suivantes, où ρ et θ désignent les coordonnées polaires du mobile :

$$(3a^2+\rho^2)\frac{d\theta}{dt}=7a^2\omega,$$

$$(3a^2+\rho^2)\frac{d\theta^2}{dt^2}+\frac{d\rho^2}{dt^2}=15a^2\omega^2-2\rho^2\omega^2,$$

et l'on en tire

$$\frac{d\rho}{dt}=\omega\sqrt{\frac{(a^2-2\rho^2)(\rho^2-4a^2)}{\rho^2+3a^2}};$$

ce qui prouve que le mobile oscillera entre les distances $\rho=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ et $\rho=2a$.

La pression N du mobile sur le tube est

$$N=\rho\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt},$$

et il n'y a qu'à substituer.

La pression du tube sur le point O est égale à la pression précédente N.

ASTRONOMIE. — *On donne les trois côtés d'un triangle sphérique*

$$a=65°.27'.18'',32,$$
$$b=84.35.26,84,$$
$$c=95.43.53,76,$$

et l'on demande de calculer :

1° *Les trois angles* A, B *et* C;

2° *Les accroissements qu'éprouvent ces trois angles quand les côtés reçoivent les petits accroissements respectifs*

$$\Delta a = +\,3'',2,$$
$$\Delta b = -\,4,5,$$
$$\Delta c = +\,6,7.$$

On considérera les accroissements comme des différentielles.

$$\operatorname{tang}\frac{A}{2} = \frac{1}{\sin(p-a)}\sqrt{\frac{\sin(p-a)(\sin p-b)(\sin p-c)}{\sin p}},$$

$$\Delta A = \frac{1}{\sin c \sin B}(\Delta a - \cos B.\Delta b - \cos C.\Delta c), \qquad \Delta a = +\,3'',2,$$

$$\Delta B = \frac{1}{\sin a \sin C}(\Delta b - \cos C.\Delta c - \cos A.\Delta a), \qquad \Delta b = -\,4,5,$$

$$\Delta C = \frac{1}{\sin b \sin A}(\Delta c - \cos A.\Delta a - \cos B.\Delta b), \qquad \Delta c = +\,6,7.$$

			L sin.
$a =$	65°.27′.18″,32	$p - a = 57°.26'.\ 1'',14$	$\bar{1}$,9257084
$b =$	84.35.26,84	$p - b = 38.17.52,62$	$\bar{1}$,7922172
$c =$	95.43.53,76	$p - c = 27.\ 9.25.70$	$\bar{1}$,6593765
$2p =$	245.46.38,92	N	$\bar{1}$,3773021
$p =$	122.53.19,45		$\bar{1}$,9241379
		N : $\sin p$	$\bar{1}$,4531642
		$\sqrt{\quad}$	$\bar{1}$,7265821
$\frac{A}{2}$	32°.18′. 7″,98	$\operatorname{tang}\frac{A}{2}$	$\bar{1}$,8008737
$\frac{B}{2}$	40.41′.12,56	$\operatorname{tang}\frac{B}{2}$	$\bar{1}$,9343649
$\frac{C}{2}$	49.24.56,08	$\operatorname{tang}\frac{C}{2}$	0,0672056

		L cos.	L $\Delta a, \Delta b, \Delta c$.	L $(\cos x\, \Delta)$.		
A	64°.36′.15″,96	$\bar{1}$,6324	+0,5051	+0,1375	$\cos A.\Delta a$	+1″,37
B	81.22.25,12	$\bar{1}$,1764	−0,6532	−$\bar{1}$,8296	$\cos B.\Delta b$	−0,68
C	98.49.52,16	−$\bar{1}$,1862	+0,8261	−0,0123	$\cos C.\Delta c$	−1,03

		L(Δ sin.sin.).	L(sin.sin.).	sin		sin.	
A. sin c sin B	4",91	0,6911	$\bar{1}$,9537	a	$\bar{1}$,9589	C	$\bar{1}$,9948
B. sin a sin C	−4,84	−0,6849	$\bar{1}$,9540	b	$\bar{1}$,9981	A	$\bar{1}$,9559
C. sin b sin A	6,01	0,7789	$\bar{1}$,9929	c	$\bar{1}$,9978	B	$\bar{1}$,9951

	log Δ.
5",46	0,7374
−5,38	−0,7309
6,11	0,7860

Nancy.

ANALYSE. — I. *On considère une fonction entière $f(z)$ telle que l'on ait, quel que soit z,*

$$f(z+\omega)=\mu f(z),$$

ω et μ étant des constantes.

1° *Soient a et b deux points du plan des z où la fonction $f(z)$ prend une même valeur non nulle, la droite ab n'étant pas parallèle à la droite $O\omega$ qui joint l'origine au point ω; soient a' et b' les deux points $a+\omega$ et $b+\omega$; soient enfin $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ les zéros de $f(z)$ distincts ou non appartenant au parallélogramme ab, $a'b'$, aucun d'eux n'étant sur le contour. On demande de calculer, à un multiple de $2\pi i\omega$ près, les deux sommes d'intégrales rectilignes*

$$\int_a^b \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz - \int_{b'}^{a'} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz.$$

$$\int_{a'}^a \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz + \int_b^{b'} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz.$$

Quel est ce multiple dans le cas où, aucune des quantités π n'étant nulle, le module de $f(z)$ reste inférieur à tous leurs modules quand le point z décrit le côté ab?

2° *Démontrer que, si μ diffère de l'unité, il existe* *une fonction primitive* $F(z)$ *de* $f(z)$ *telle que l'on ait aussi*

$$F(z+\omega)=\mu F(z);$$

quel est, dans le cas de $\mu=1$, *la forme générale des fonctions primitives?*

II. *Les coordonnées étant rectangulaires, on considère la courbe plane* C *enveloppe de la droite*

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = \varphi(\alpha),$$

où α *désigne un paramètre variable et* $\varphi(\alpha)$ *une fonction déterminée de ce paramètre.*

1° *Supposant*

$$\varphi(\alpha)=A\sin(\alpha+a)+A\frac{\cos(\alpha+a)}{\alpha},$$

former l'équation différentielle du deuxième ordre à laquelle satisfait $\varphi(\alpha)$ *quelles que soient les constantes* A *et* a, *et écrire l'expression du rayon de courbure en fonction de* α.

2° *Trouver toutes les courbes* C *pour lesquelles* $\varphi(\alpha)$ *vérifie l'équation*

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}+\left(1-\frac{2}{\alpha^2}\right)\varphi=\alpha.$$

I. En remarquant que

$$\int_{b'}^{a'}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz=\int_{b}^{a}\frac{(z+\omega)f'(z)}{f(z)}dz,$$

on voit que la première somme est égale à

$$-\int_{b}^{a}\frac{\omega f'(z)}{f(z)}dz=-\omega[\mathrm{L}f(b)-\mathrm{L}f(a)];$$

et comme $f(b)$ est égal à $f(a)$, elle est de la forme $2ni\pi\omega$, n étant un nombre entier qui se réduit à zéro si le module de $f(z)$ reste inférieur aux modules des zéros $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ le long de ab.

La somme des quatre intégrales, étant l'intégrale de $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ prise le long du parallélogramme $abb'a'$, est égale au produit de $2i\pi$ par la somme des résidus de cette fonction, relatifs aux zéros $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ de $f(z)$, c'est-à-dire $2i\pi(\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_n)$. Les deux sommes demandées sont ainsi connues.

Soit maintenant $\varphi(z)$ une fonction primitive de $f(z)$; elle satisfait à l'équation

$$\varphi'(z + \omega) = \mu\varphi'(z),$$

d'où l'on tire

$$\varphi(z + \omega) = \mu\varphi(z) + c;$$

si μ diffère de l'unité, il suffit de poser

$$F(z) = \varphi(z) + \frac{c}{\mu - 1},$$

pour satisfaire à la condition

$$F(z + \omega) = \mu F(z);$$

si μ est égal à l'unité, la forme générale des fonctions primitives est $F(z) + \frac{cz}{\omega}$, $F(z)$ étant une fonction de z particulière admettant la période ω.

II. En éliminant les paramètres A et a entre $\varphi(\alpha)$ et ses deux premières dérivées, on trouve que la fonction $\varphi(\alpha)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2}\right)\varphi = 0,$$

et que le rayon de courbure est égal à $\varphi(\alpha) + \varphi''(\alpha)$. Pour intégrer l'équation différentielle donnée, avec second membre, il suffit d'ajouter à la valeur attribuée à $\varphi(\alpha)$, dans la première partie, l'intégrale particulière

$$\alpha + \frac{2}{\alpha}.$$

Mécanique. — *Démontrer que la stabilité de l'équilibre d'un solide rigide homogène pesant, flottant dans un fluide homogène pesant, est assurée lorsque le centre de poussée n'est pas au-dessous du centre de gravité du solide rigide, à une distance supérieure à $\frac{I}{V}$, où I est le plus petit moment d'inertie de la section d'affleurement, relativement aux axes passant par son centre de gravité, et où V est le volume immergé.*

Épreuve pratique. — Astronomie. — *Calculer la longitude et la latitude d'un astre dont les coordonnées équatoriales sont*

$$\mathrm{AR} = 8^h\,18^m\,30^s, \qquad \mathrm{D} = 10^\circ 36' 52'' 4;$$

l'obliquité de l'écliptique est $\omega = 23^\circ 27' 35'' 8$.

Poitiers.

Analyse. — *Montrer que l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad f\left(p, q, \frac{y}{x}\right) = 0$$

admet des solutions qui représentent des cônes ayant leurs sommets sur l'axe Oz.

Considérant en particulier l'équation

$$(2) \qquad qx - py - \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\sqrt{x^2 + y^2}\,\varphi\frac{x}{y} = 0,$$

transformer cette équation et l'équation différen-

tielle des cônes dont le sommet est sur O z, *en prenant pour variables indépendantes les coordonnées polaires* r *et* θ.

Faire voir que l'on obtient l'équation finie des cônes solutions communes à l'aide de quadratures.

Effectuer le calcul en supposant

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{my}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Examiner le cas où $m = 1$.

Démontrer que toutes les surfaces représentées par l'équation (2) *sont coupées par le plan* $y = ax$ *suivant des lignes de courbure.* (*a désigne une constante.*)

MÉCANIQUE. — 1. *Lieu des points d'un plan lié au mouvement d'un corps solide dont les vitesses, à un instant donné, sont également inclinées sur la normale au plan.*

2. *Équations du mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe. — Intégrales premières. — Cas d'un corps pesant animé d'une très grande vitesse de rotation autour de son axe, et que l'on abandonne à lui-même sans autre vitesse initiale. — Calcul de la précession et de la nutation à un instant quelconque.*

ASTRONOMIE. — *Le* 1^{er} *novembre* 1896, *à midi vrai, la déclinaison du Soleil est* — 14° 41′ 19″4.

Le 2 *novembre, elle est* — 15° 0′ 16″5.

L'accroissement de l'ascension droite dans l'intervalle est $3^{m}\,56^{s},2$.

Calculer l'obliquité de l'écliptique.

Toulouse.

ANALYSE. — I. a, b, c, d *désignant des quantités données, étudier les valeurs diverses de l'intégrale*

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(a-z)(b-z)(c-z)(d-z)}}$$

lorsque le chemin d'intégration varie, en conservant les mêmes extrémités; indiquer ce que l'on entend par périodes de cette intégrale.

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$1 + p^2 + q^2 - 2z = 0,$$

où p *et* q *désignent, suivant l'usage, les dérivées* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$, *par rapport aux variables indépendantes* x *et* y *de la fonction* z.

1° *Démontrer que, si l'on considère* x, y, z *comme les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point, il existe des surfaces intégrales particulières de cette équation qui sont de révolution autour d'une parallèle à l'axe coordonné* Oz.

2° *Déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont*

$$x = 0, \qquad y = 2z - 1;$$

ce problème admet-il une ou plusieurs solutions?

MÉCANIQUE. — I. *Un point matériel pesant, assujetti à se mouvoir sur un cylindre de révolution dont l'axe est vertical, est attiré par un point fixe proportionnellement à la distance. On demande d'étudier le mouvement de ce point. Pression exercée par le point sur la surface.*

Cas particulier : le centre d'attraction est situé sur l'axe du cylindre.

II. *Indiquer très succinctement la marche à suivre pour établir les six équations d'Euler, qui permettent d'étudier le mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe et sollicité par des forces données.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une planète décrit une orbite elliptique. A un instant donné, l'anomalie vraie v, l'excentricité* $\sin\varphi$, *le rayon vecteur r sont déterminés par les valeurs suivantes :*

$$v = 310^{\circ}\,55'\,29'',64, \qquad \varphi = 14^{\circ}\,12'\,1'',87, \qquad \log r = 0,3307640.$$

On demande le paramètre de l'orbite, le demi grand axe, et, à l'instant donné, l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne.