NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

R. GILBERT

Concours des « Nouvelles annales » pour 1896

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 16 (1897), p. 101-112

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1897_3_16__101_0>

[A3k]

CONCOURS DES « NOUVELLES ANNALES » POUR 1896;

PAR M. R. GILBERT (1).

Soit $F(x)$ *un polynome du quatrième degré, dont les quatre racines* a, b, c, d *sont distinctes; on divise le carré de la dérivée par* $F(x)$. *Si l'on désigne par* Q *et* R *le quotient et le reste de cette division, on a*

$$F'^2(x) = F(x)Q + R.$$

1° *Prouver que* Q *est un carré parfait;*

2° *Prouver que le polynome*

$$F(x) + \rho R(x)$$

est carré parfait pour trois valeurs différentes de ρ.

3° *Trouver tous les polynomes du quatrième degré* $G(x)$ *qui sont tels que le polynome*

$$F(x) + \rho G(x)$$

soit carré parfait pour trois valeurs distinctes de ρ.

4° *En général, le reste* R *est du troisième degré; pour qu'il s'abaisse au second, il faut et il suffit que la condition suivante soit remplie :*

$$F'(a) + F'(b) + F'(c) + F'(d) = 0.$$

Le reste R *est alors carré parfait; il ne diffère de* Q *que par un facteur constant.*

Montrer que ce cas est caractérisé par ce fait que l'addition à $F(x)$ *d'une constante convenable rend*

(1) Mémoire ayant obtenu le prix.

le polynome carré parfait. La réciproque est-elle vraie?

Dans ce cas, les paragraphes 2° *et* 3° *subissent-ils quelque modification?*

1. Soit

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \\ &= a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \end{aligned}$$

un polynome du quatrième degré dont les quatre racines a, b, c, d sont distinctes. On divise le carré de la dérivée par $F(x)$; soit Q le quotient, R le reste; on a

$$F'^2(x) = F(x)\,Q(x) + R(x).$$

Cherchons s'il est possible de déterminer ρ tel que $F + \rho R$ soit carré parfait. Posons

$$F + \rho R = \rho P^2,$$

P étant un polynome en x du second degré.

Le système des deux équations précédentes est équivalent au suivant :

$$\begin{cases} F'^2 = FQ + R, \\ F(\rho Q - 1) = \rho(F'^2 - P^2). \end{cases}$$

Il faut et il suffit que la seconde équation soit vérifiée identiquement. Or elle est du sixième degré; et, en tenant compte de la première, les termes de degrés six et cinq sont les mêmes dans les deux membres; il y aura donc cinq conditions; on en obtient quatre en écrivant que a, b, c, d sont des racines du second membre : ce qui conduit à l'un ou l'autre des deux systèmes :

$$\begin{cases} P(a) = F'(a), \\ P(b) = F'(b), \\ P(c) = F'(c), \\ P(d) = -F'(d), \end{cases} \qquad \begin{cases} P(a) = F'(a), \\ P(b) = F'(b), \\ P(c) = -F'(c), \\ P(d) = -F'(d), \end{cases}$$

ce qui, en appliquant la formule d'interpolation de Lagrange, donne l'une ou l'autre des deux valeurs de $P(x)$:

$$P(x) \equiv F(x)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-d}\right),$$

$$P(x) \equiv F(x)\left(-\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}-\frac{1}{x-d}\right).$$

La première donne pour P un polynome du troisième degré. Reste donc la seconde

$$P(x) = a_0[x^2(c+d-a-b)+\ldots].$$

On obtiendra la cinquième condition en identifiant les termes de plus haut degré dans $F+\rho R = \rho P^2$; ce qui donne

$$\rho = \frac{1}{(a+b-c-d)^2},$$

et l'on voit ainsi qu'il y a trois valeurs de ρ rendant $F+\rho R$ carré parfait.

2. Proposons-nous maintenant le problème plus général de trouver tous les polynomes $G(x)$ du quatrième degré tels que $F+\rho G$ soit carré parfait pour trois valeurs de ρ. Ce problème a des solutions, puisque nous venons d'en trouver une.

Observons d'abord que les coefficients de $R(x)$ rendus entiers sont des fonctions du troisième degré de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, de sorte que

$$a_0 R(x) = b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 + 3 b_2 x + b_3.$$

Ce polynome $R(x)$ peut se mettre sous une autre forme. Faisons $x = a$ dans l'équation $F'^2 = FQ + R$, on a

$$R(a) = F'^2(a),$$

d'où, par la formule d'interpolation de Lagrange,

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(x) &= \mathrm{F}(x)\left[\frac{\mathrm{F}'(a)}{x-a}+\frac{\mathrm{F}(b)}{x-b}+\frac{\mathrm{F}'(c)}{x-c}+\frac{\mathrm{F}'(d)}{x-d}\right] \\ &= \mathrm{F}(x)\left[\sum \frac{\mathrm{F}'(a)}{x-a}\right]. \end{aligned}$$

On en tire

$$b_0 = a_0^2[\Sigma\,\mathrm{F}'(a)].$$

En général, le reste $\mathrm{R}(x)$ est du troisième degré; pour qu'il s'abaisse au second, il faut et il suffit que

$$\Sigma\,\mathrm{F}'(a) = 0.$$

Remarquons que, si cette condition s'exprime en fonction entière des coefficients de $\mathrm{F}(x)$, l'équation obtenue ne renferme pas a_4; en outre, il n'y a qu'un terme en a_3 de la forme $\mathrm{K}a_0^2a_3$, car le premier membre de l'équation précédente est de poids trois (K est un nombre).

Cela étant, pour que $\mathrm{F}(x)$ soit carré parfait, il faut et il suffit visiblement que $\mathrm{R}(x)$ soit identiquement nul. Mais les conditions pour qu'il en soit ainsi doivent se réduire à deux *a priori*; et si ces conditions s'expriment en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ce dernier élément a_4 doit entrer dans l'une des conditions, car sinon, $\mathrm{F}(x)$ étant carré parfait, $\mathrm{F}(x)+\mathrm{K}$ le serait aussi, quel que soit K. Ces deux conditions seront :

1° $\Sigma\mathrm{F}'(a) = 0$; soit $\mathrm{M} = 0$ cette équation;

2° Une condition renfermant a_4, soit $\mathrm{N} = 0$ cette équation.

De là suit que Q est carré parfait, car ses coefficients ne dépendent que de a_0, a_1, a_2; si donc l'on dispose de a_3, a_4 (et c'est possible d'après ce qui précède), de façon que $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, Q ne change pas; mais dans ce cas il est visible que $\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{F}'^2}{\mathrm{F}}$ est carré parfait.

3. Revenons aux polynomes $G(x)$. Divisons G'^2 par G; soit S le reste et posons

$$\begin{cases} G = g_0 x^4 + 4 g_1 x^3 + 6 g_2 x^2 + 4 g_3 x + g_4, \\ g_0 S = h_0 x^3 + 3 h_1 x^2 + 3 h_2 x + h_3. \end{cases}$$

Si $F + \rho G$ est carré parfait, le reste R, relatif à $F + \rho G$, est identiquement nul; si donc nous désignons par $b_p(\rho)$ ce que devient le coefficient b_p quand on remplace F par $F + \rho G$, les quatre équations suivantes doivent être simultanément satisfaites pour une même valeur de ρ :

$$(1) \quad \begin{cases} b_0(\rho) = b_0 + c_0 \rho + d_0 \rho^2 + h_0 \rho^3 = 0, \\ b_1(\rho) = b_1 + c_1 \rho + d_1 \rho^2 + h_1 \rho^3 = 0, \\ b_2(\rho) = b_2 + c_1 \rho + d_2 \rho^2 + h_2 \rho^3 = 0, \\ b_3(\rho) = b_3 + c_3 \rho + d_3 \rho^2 + h_3 \rho^3 = 0; \end{cases}$$

car les coefficients b sont évidemment du troisième degré en fonction de ceux de $F(x)$.

A chaque valeur de ρ, rendant $F + \rho G$ carré parfait, correspond une racine commune à ces équations; ce qui montre qu'il ne peut pas y avoir plus de trois valeurs de ρ, car on aurait $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$; $F(x)$ serait carré parfait et ses racines non distinctes comme on l'a supposé. Pour qu'il y ait trois valeurs de ρ rendant $F + \rho G$ carré parfait, il faut que les équations (1) aient les mêmes racines.

Donc, en particulier, on aura

$$\frac{b_0}{h_0} = \frac{b_1}{h_1} = \frac{b_2}{h_2} = \frac{b_3}{h_3}.$$

Cela exprime que les restes R, S sont les mêmes, à un facteur près.

On peut donc poser

$$S = 16 \beta a_0 R.$$

D'autre part, $Q(x)$ étant carré parfait, si l'on identifie les premiers termes de $F'^2 = FQ + R$, on trouve

$$Q = 16a_0\left(x + \frac{a_1}{a_0}\right)^2.$$

Donc on est conduit à trouver un polynome $G(x)$, tel que

$$G'^2 = 16g_0\left(x + \frac{g_1}{g_0}\right)^2 \times G + 16\beta a_0 R.$$

Dans cette égalité, R seul est donné; on pourrait identifier les deux membres et obtenir g_0, g_1, g_2, g_3, g_4 en fonction de deux variables; mais le calcul serait plus pénible que de la façon suivante :

Posons $g_1 = g_0\alpha$ et faisons le changement de variable

$$x + \alpha = y;$$

de sorte que $G(x)$ et $R(x)$ deviennent deux polynomes en y, que nous désignerons par $U(y)$ et $T(y)$

$$\left\{\begin{aligned} U(y) &= u_0y^4 + 6u_2y^2 + 4u_3y + u_4, \qquad (u_0 = g_0),\\ T(y) &= b_0y^3 + 3(b_1 - b_0\alpha)y^2\\ &\quad + 3(b_2 - 2b_1\alpha + b_0\alpha^2)y + b_3 - 3b_2\alpha + 3b_1\alpha^2 - b_0\alpha^3,\end{aligned}\right.$$

et l'on a l'équation

$$U'^2 = 16u_0y^2U - 16\beta T.$$

Identifions maintenant les deux membres de cette équation; on trouve, pour déterminer u_0, u_2, u_3, u_4, le système

$$\left\{\begin{aligned} &2u_0u_3 - 4u_0u_3 = \beta B_0,\\ &9u_2^2 - u_0u_4 = 3\beta(b_1 - \alpha b_0),\\ &6u_2u_3 = 3\beta(b_2 - 2\alpha b_1 + \alpha^2 b_0),\\ &u_3^2 = \beta(b_3 - 3\alpha b_2 + 3\alpha^2 b_1 - \alpha^3 b_0).\end{aligned}\right.$$

On tire immédiatement de là des quantités proportionnelles à u_0, u_2, u_3, u_4 :

$$\frac{u_0}{b_0^2} = \frac{u_2}{-(b_2 - 2\alpha b_1 + \alpha^2 b_0) b_0}$$
$$= \frac{u_3}{2(b_3 - 3 b_2 \alpha + 3 b_1 \alpha^2 - b_0 \alpha^3) b_0}$$
$$= \frac{u_4}{9(b_2 - 2\alpha b_1 + \alpha^2 b_0)^2 - 12(b_3 - 3\alpha b_2 + 3\alpha^2 b_1 - \alpha^3 b_0)(b_1 - \alpha b_0)}.$$

Égalons à λ la valeur commune de ces rapports; remplaçons ensuite les u dans U, puis remplaçons y par $x + \alpha$ et réduisons; on obtient, en définitive, le polynome G sous la forme

$$G = \lambda [b_0^2 x^4 + 4 b_0^2 \alpha x^3 + 6 b_0 (2 b_1 \alpha - b_2) x^2 + 4 b_0 (3\alpha b_2 - 2 b_3) x + 4 b_0 b_3 \alpha + 9 b_2^2 - 12 b_1 b_3].$$

Posons enfin

$$\lambda \alpha = \mu,$$

puis

$$G_1 = b_0^2 x^4 - 6 b_0 b_1 x^2 - 8 b_0 b_3 x + 9 b_2^2 - 12 b_1 b_3;$$

on a

$$G = \lambda G_1 + 4 \mu a_0 b_0 R.$$

C'est la solution du problème. En effet, l'équation générale des polynomes G ne peut être que de cette forme, qui renferme deux paramètres arbitraires λ, μ. Or, *a priori*, l'équation générale des polynomes cherchés renferme deux paramètres arbitraires, leur définition les assujettissant à trois conditions; c'est donc là l'équation générale des polynomes cherchés.

4. Nous allons maintenant examiner un cas particulier intéressant.

On a vu que R, qui est généralement du troisième degré, est du second degré lorsque $\Sigma F'(a) = 0$. Nous allons montrer que ce cas est caractérisé par la propriété suivante : Si l'on ajoute à $F(x)$ une constante convenable K, on a un carré parfait.

En effet, divisons par $F + K$ le carré de sa dérivée F'^2; soit Q_1 le quotient, R_1 le reste, on a

$$F'^2 = (F + K)Q_1 + R_1,$$

ou

$$FQ + R = (F + K)Q_1 + R_1,$$

ou

$$F(Q - Q_1) = KQ_1 + R_1 - R.$$

Or, F étant du quatrième degré et le second membre du troisième,

$$Q - Q_1 = 0,$$
$$KQ_1 + R_1 - R = 0.$$

Cela étant : si R est du second degré, il en est de même de R_1; si, de plus, l'on dispose de K de façon à annuler les trois autres termes de $KQ_1 - R = KQ - R$, R_1 est identiquement nul ; les trois équations en K ainsi obtenues sont compatibles ; en effet, dire que R_1 est nul, c'est dire que $F + K$ est carré parfait. On a vu plus haut qu'il y a deux conditions pour qu'il en soit ainsi, à savoir : 1° R_1 est du second degré ; 2° une autre condition renfermant K. Les trois équations en K se réduisent donc à une seule et K est déterminé par une équation du premier degré.

Cette équation est $R = KQ$: on voit donc que R est carré parfait et ne diffère de Q que par un facteur constant.

Réciproquement, si $F + K$ est carré parfait, R_1 est nul et l'on a

$$\begin{cases} Q - Q_1 = 0, \\ KQ_1 - R = 0; \end{cases}$$

ce qui montre que R est du second degré.

Ces propriétés se vérifient sur l'équation générale des polynomes G; en effet, dans ce cas, on a $b_0 = 0$, et, comme R est carré parfait, on a aussi $9b_2^2 - 12b_1b_3 = 0$; donc G_1 est nul, mais on peut faire λ et μ infinis et en disposer de telle sorte que

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda b_0 = -\theta,\\ \mu b_0 = \eta,\end{array}\right.$$

θ et η étant deux paramètres arbitraires finis, non nuls.

Si l'on pose

$$G_2 = -6b_2x^2 - 8b_3x + \frac{1}{b_0}(9b_2^2 - 12b_1b_3),$$

$$G = \theta G_2 + 4a_0\eta R.$$

Mais de $9b_2^2 - 12b_1b_3 = 0$ on déduit $\frac{6b_2}{3b_1} = \frac{8b_3}{3b_2}$; donc G_2 et R ont leurs premiers coefficients proportionnels; quant à l'expression $\frac{9b_2^2 - 12b_1b_3}{b_0}$, elle a une valeur indéterminée lorsque b_0 s'annule; car, s'il en était autrement, c'est que l'on aurait, lorsque b_0 tend vers zéro, une relation entre $9b_2^2 - 12b_1b_3$ et b_0, c'est-à-dire une relation entre les coefficients de R. Or, cela n'est pas possible, car alors se donner R, ce ne serait se donner que trois relations entre les coefficients de F; se donner R_1, à un facteur constant près, ne donnerait que deux relations et F dépendrait de trois paramètres arbitraires; mais c'est ainsi que nous avons précisément trouvé G, et nous avons vu qu'il ne peut dépendre que de deux paramètres arbitraires λ, μ; donc, enfin, $\frac{9b_2^2 - 12b_1b_3}{b_0}$ a une valeur quelconque et, en définitive, on peut écrire

$$G = \sigma R + \tau,$$

σ et τ étant deux paramètres arbitraires.

On peut donc disposer de ρ de telle sorte que $F + \rho\tau$ soit carré parfait.

5. Il semblerait, de la façon dont on a déduit les polynomes $G = \sigma R + \tau$ du cas général où b_0 n'est pas nul, que ces polynomes sont tels que $F + \rho G$ est carré parfait pour trois valeurs de ρ. Nous allons faire voir qu'il n'en est rien et qu'en général $F + \rho G$ n'est carré parfait que pour deux valeurs de ρ.

Effectivement, dans le cas particulier qui nous occupe, on a

$$G = \sigma(3b_1x^2 + 3b_2x + b_3) + \tau,$$
$$G' = 3\sigma(2b_1x + b_2),$$

et

$$S = G'^2 = 9\sigma^2(2b_1x + b_2)^2,$$

et comme

$$g_0 S = h_0x^3 + 3h_1x^2 - 3h_2x + h_3,$$

on en déduit que g_0 étant nul, h_0, h_1, h_2, h_3 sont nuls, et que les équations du système (1) ont une racine en ρ infinie. Or, pour ρ infini, $F + \rho G$ se réduit à G, qui, en général (σ et τ étant quelconques), n'est pas carré parfait.

Ce serait faire un faux raisonnement, de déduire que G est carré parfait de ce que les équations (1) ont une racine commune infinie; car, pour montrer que tous les polynomes G de la forme $\lambda G_1 + 4\mu a_0 b_0 R$ sont bien tels que $F + \rho G$ est carré parfait pour trois valeurs de ρ, nous avons supposé que l'équation générale de ces polynomes ne dépendait que de deux paramètres arbitraires, c'est-à-dire précisément que l'équation qui donne les valeurs de ρ était du troisième degré; or, ici, cette hypothèse est fausse, car toutes les équations (1) (sauf la première, qui disparaît identiquement) sont réduites au second degré.

Remarque. — La première des équations (1) disparaît identiquement; en effet, b_0 étant nul, et b_1 b_2, b_3 ne l'étant pas, sans quoi F sera carré parfait, les équations autres que la première ne peuvent avoir zéro pour racine. La première, qui admet zéro pour racine, disparaît donc.

Il résulte donc de là que, si $b_0 = 0$, les polynomes $G = \sigma R + \tau$ ne sont, en général (sauf les cas particuliers $\sigma = 0$, $\tau = 0$) pas carrés parfaits, et que, pour deux valeurs de ρ seulement, $F + \rho G$ est carré parfait.

Nous ne nous proposerons pas de trouver l'équation générale des polynomes satisfaisant à ces deux conditions. Nous terminerons par une interprétation de l'équation $b_0 = 0$ relativement aux racines de l'équation $F(x) = 0$.

6. On a vu que les valeurs de ρ rendant carré parfait $F + \rho R$ sont les valeurs de l'expression $\frac{1}{(a+b-c-d)^2}$. Donc, pour $b_0 = 0$, la somme de deux racines est égale à celle des deux autres La réciproque est vraie.

En effet, on a

$$F'(z) = a_0 \Sigma (x-b)(x-c)(x-d),$$
$$F'(a) = a_0 \Sigma (a-b)(a-c)(a-d).$$

De $a + b = c + d$ on déduit

$$\left\{\begin{aligned} a - c &= d - b,\\ a - d &= c - b,\end{aligned}\right.$$

par suite

$$-(a-b)(a-c)(a-d) = (b-c)(b-d)(b-a).$$

Donc, si la somme de deux racines est égale à celle des deux autres, on a

$$\Sigma F'(a) = 0$$

et, par suite,

$$b_0 = 0.$$

D'ailleurs, le produit

$$(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c)$$

est une fonction symétrique de a, b, c, d; donc, exprimé en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, il sera de poids trois; comme $\Sigma F'(a)$ est aussi de poids trois, leur quotient est fonction de a_0 seul. Pour le calculer, il suffit de considérer une équation particulière $a_0 x^4 - a_0 x^3 = 0$, par exemple; on trouve ainsi

$$\Sigma F'(a) = a_0(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$$