Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 576-582
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__576_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1706.

(1896, p. 55).

Par chaque point M *d'une ellipse, on mène deux droites qui rencontrent le grand axe sous l'angle d'anomalie excentrique relatif au point* M.

Chacune de ces droites enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements. (E.-N. BARISIEN).

SOLUTION

Par M. AUDIBERT.

Soient t l'angle d'anomalie relatif à M, a et b les demi-axes de l'ellipse. Les deux droites menées de M

$$y\cos t - x\sin t + (a-b)\sin t\cos t = 0,$$
$$y\cos t + x\sin t - (a+b)\sin t\cos t = 0$$

déterminent, par leur rencontre avec les axes quand M se déplace, des segments de longueurs constantes $a-b$ et $a+b$.

On sait que les courbes qu'elles enveloppent sont représentées par les équations

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a-b)^{\frac{2}{3}} \quad \text{ou} \quad (a+b)^{\frac{2}{3}},$$

qui représentent aussi deux hypocycloïdes à quatre rebroussements, tracées à l'intérieur des cercles fixes de rayons $a-b$ et $a+b$.

Question 1709.

(1896, p. 56.)

On donne sur un plan les circonférences de cercles C_1, C_2, C_3. *On trace une circonférence* O *tangente à* C_1 *et* C_2.

On demande :

1° *Quelle est l'enveloppe de l'axe radical de* C_3 *et de* O, *lorsque cette dernière courbe varie en restant tangente à* C_1 *et* C_2?

2° *Quel est le lieu du point de rencontre de cet axe radical et de la droite qui joint les points de contact de* O *avec* C_1 *et* C_2? (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Cette question, traitée directement, ne serait pas aisée à résoudre. En s'appuyant sur des propriétés connues, elle devient facile.

On sait, en effet, que le lieu des centres des circonférences O tangentes à deux circonférences fixes C_1 et C_2 se compose de deux coniques ayant pour foyers les centres de C_1 et C_2.

Quand les cercles C_1 et C_2 sont intérieurs l'un à l'autre, les coniques sont des ellipses ; lorsque les cercles C_1 et C_2 sont extérieurs l'un à l'autre, les coniques sont des hyperboles.

Nous allons donc envisager successivement ces deux cas.

I. — *Les cercles* C_1 *et* C_2 *sont intérieurs l'un à l'autre.*

Admettons que le cercle C_2 soit à l'intérieur du cercle C_1.

Soient R_1, R_2, R_3 les rayons des trois cercles C_1, C_2, C_3 ; ρ le rayon du cercle O.

Le cercle O peut être placé de telle sorte que

$$\overline{OC_1} = R_1 - \rho, \qquad \overline{OC_2} = R_2 + \rho.$$

Alors

$$\overline{OC_1} + \overline{OC_2} = R_1 + R_2.$$

Le cercle O peut être situé de telle façon que

$$\overline{OC_1} = R_1 - \rho, \qquad \overline{OC_2} = \rho - R_2.$$

Alors

$$\overline{OC_1} + \overline{OC_2} = R_1 - R_2.$$

Le point O, centre du cercle O, décrit donc deux ellipses ayant leurs foyers en C_1 et C_2 et dont les grands axes respectifs sont $R_1 + R_2$ et $R_1 - R_2$.

Supposons donc d'abord que le centre O parcoure l'ellipse de grand axe $(R_1 + R_2)$.

Prenons des axes rectangulaires, l'axe des x_1 étant la ligne des centres de C_1 et C_2, et l'origine des coordonnées étant au milieu de C_1C_2.

Désignons par $2c$ la distance des centres C_1, C_2. Les axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse en question ont pour expressions

$$(1) \qquad 2a = R_1 + R_2, \qquad 4b^2 = (R_1 + R_2)^2 - 4c^2.$$

Soient (x_1, y_1) les coordonnées de O. Alors

$$(2) \qquad b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

On a donc

$$(3) \qquad \overline{OC_1} = a + \frac{cx_1}{a}, \qquad \overline{OC_2} = a - \frac{cx_1}{a},$$

et comme $\overline{OC_1} = R_1 - \rho$, il en résulte

$$R_1 - \rho = a + \frac{cx_1}{a},$$

ou

$$(4) \qquad \rho = R_1 - a - \frac{cx_1}{a} = \frac{R_1 - R_2}{2} - \frac{cx_1}{a}.$$

L'équation du cercle O est donc

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \left(\frac{R_1 - R_2}{2} - \frac{cx_1}{a}\right)^2.$$

Cette équation développée devient, en tenant compte des relations (2) et (1),

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + R_1R_2 - c^2 + (R_1 - R_2)\frac{cx_1}{a} = 0.$$

Si (α, β) sont les coordonnées du centre du cercle C_3, l'équation de ce cercle est

$$(6) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R_3^2 = 0.$$

Alors :

1° L'équation de l'axe radical des cercles (5) et (6) s'écrit, en retranchant (5) et (6), et ordonnant par rapport à x_1 et y_1,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &x_1\left[2x-(R_1-R_2)\frac{c}{a}\right]+2yy_1-2\alpha x-2\beta y\\ &\qquad +c^2-R_1R_2-R_3^2+\alpha^2+\beta^2=0.\end{aligned}\right.$$

On peut poser $x_1 = a\cos\varphi$, $y_1 = b\sin\varphi$. L'équation (7) est donc de la forme

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi + C = 0.$$

L'enveloppe d'une telle équation, φ étant le paramètre variable, s'écrit

$$A^2 + B^2 = C^2.$$

L'enveloppe de l'axe radical (7) est donc la conique

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2\left[2x-(R_1-R_2)\frac{c}{a}\right]^2+4b^2y^2\\ &\quad=(2\alpha x+2\beta y+R_1R_2+R_3^2-c^2-\alpha^2-\beta^2)^2.\end{aligned}\right.$$

2° Soient M_1 et M_2 les points de contact respectifs du cercle O avec les cercles C_1 et C_2. On sait que les droites M_1M_2 passent par le centre de similitude interne de C_1 et C_2, ayant pour coordonnées

$$x = \frac{c(R_1-R_2)}{R_1+R_2} = \frac{c(R_1-R_2)}{2a}, \qquad y = 0.$$

La droite M_1M_2 est perpendiculaire à la tangente à l'ellipse au point O, de sorte que l'équation de M_1M_2 est

$$(9)\qquad y = \left[x - \frac{c}{2a}(R_1-R_2)\right]\frac{a^2y_1}{b^2x_1}.$$

Au moyen de l'angle excentrique φ, les équations (7) et (9) deviennent

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &a\cos\varphi\left[2x-(R_1-R_2)\frac{c}{a}\right]\\ &\quad +2by\sin\varphi-2\alpha x-2\beta y\\ &\quad +c^2-R_1R_2-R_3^2+\alpha^2+\beta^2=0,\end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2by}{a\left[2x-(R_1-R_2)\dfrac{c}{a}\right]}.$$

En éliminant φ entre (10) et (11), on trouve pour le lieu du point de rencontre de la droite MM′ avec l'axe radical (7), la conique (8).

Il en résulte donc que la droite MM′ rencontre l'axe radical au point où cette dernière droite touche son enveloppe.

Supposons maintenant que le centre O parcoure l'ellipse de grand axe $(R_1 - R_2)$. Il suffit de changer, dans ce qui a été exposé précédemment, R_2 en $-R_2$. On obtient ainsi la conique

$$(12)\quad \begin{cases} a^2\left[2x - (R_1 + R_2)\dfrac{c}{a}\right]^2 + 4b^2y^2 \\ \quad = (2\alpha x + 2\beta y - R_1 R_2 + R_3^2 - C^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2, \end{cases}$$

pour laquelle

$$2a = R_1 - R_2, \qquad 4b^2 = (R_1 - R_2)^2 - 4c^2.$$

Donc, l'enveloppe totale se compose des deux coniques (8) et (12) qui s'écrivent encore

$$(13)\quad \begin{cases} [x(R_1 + R_2) - c(R_1 - R_2)]^2 + [(R_1 + R_2)^2 - 4c^2]y^2 \\ \quad = (2\alpha x + 2\beta y + R_1 R_2 + R_3^2 - c^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} [x(R_1 - R_2) - c(R_1 + R_2)]^2 + [(R_1 - R_2)^2 - 4c^2]y^2 \\ \quad = (2\alpha x + 2\beta y - R_1 R_2 + R_3^2 - c^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2. \end{cases}$$

II. — *Les cercles C_1 et C_2 sont extérieurs l'un à l'autre.*

Supposons $R_1 > R_2$. En traitant la question de la même manière que dans le cas précédent, on voit que le point O décrit l'une ou l'autre des hyperboles de foyers C_1 et C_2 ayant pour longueurs de l'axe transverse soit $(R_1 - R_2)$, soit $(R_1 + R_2)$.

Dans le cas où l'hyperbole a pour axe transverse $(R_1 - R_2)$, on a

$$2a = R_1 - R_2, \qquad 4b^2 = 4c^2 - (R_1 - R_2)^2.$$

Les coordonnées (x_1, y_1) de O satisfont à l'équation

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

Alors

$$\overline{OC_1} = \frac{cx_1}{a} + a, \qquad \overline{OC_2} = \frac{cx_1}{a} - a,$$

$$\rho = \frac{cx_1}{a} - \frac{(R_1 + R_2)}{2}.$$

L'équation du cercle O est donc

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \left[\frac{cx_1}{a} - \frac{(R_1 + R_2)}{2}\right]^2.$$

En retranchant cette équation de l'équation (6), on aura, pour l'équation de l'axe radical des cercles O et C_3,

$$\begin{gathered} x_1\left[2x - \frac{c}{a}(R_1 + R_2)\right] \\ + 2yy_1 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 + c^2 - R_3^2 + R_1 R_2 = 0. \end{gathered}$$

En posant $x_1 = a\,\text{séc}\,\varphi$, $y_1 = b\,\text{tang}\,\varphi$, l'équation dont on veut l'enveloppe est de la forme

$$A\,\text{séc}\,\varphi + B\,\text{tang}\,\varphi = C.$$

L'équation de l'enveloppe est

$$A^2 - B^2 = C^2.$$

L'axe radical de O et C_3 enveloppe donc la conique

$$\begin{gathered} a^2\left[2x - \frac{c}{a}(R_1 + R_2)\right]^2 - 4b^2y^2 \\ = (2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 + R_3^2 + R_1 R_2)^2, \end{gathered}$$

ou bien

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &[(R_1 - R_2)x - c(R_1 + R_2)]^2 - [4c^2 - (R_1 - R_2)^2]y^2 \\ &\quad = (2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 + R_3^2 + R_1 R_2)^2. \end{aligned} \right.$$

Si le point O parcourt l'hyperbole d'axe transverse $(R_1 + R_2)$, l'axe radical enveloppe alors la conique

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} &[(R_1 + R_2)x - c(R_1 - R_2)]^2 - [4c^2 - (R_1 + R_2)^2]y^2 \\ &\quad = (2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 + R_3^2 + R_1 R_2)^2. \end{aligned} \right.$$

Il est à remarquer que $2b$ n'est autre chose que la longueur de la tangente commune extérieure aux cercles C_1 et C_2 dans le cas de la conique (15), et la longueur de la tangente commune intérieure dans le cas de la conique (16).

On voit d'ailleurs que la conique (13) est identique à la conique (16); il en est de même de (14) et (15).

Remarques. — 1° Lorsque le rayon R_2 du cercle C_2 devient infini et que ce cercle devient une droite Δ, le lieu des centres des cercles O tangents à la fois à C_1 et à Δ se compose de deux paraboles. La question peut alors se traiter directement d'une manière analogue à l'analyse précédente. On trouve encore que les axes radicaux de C_3 et O enveloppent deux coniques.

2° On trouverait aussi que, dans le cas tout à fait général de l'énoncé, *le lieu du centre de similitude externe des cercles* O *et* C_3 *se compose de deux coniques; le lieu du centre de similitude interne des mêmes cercles se compose aussi de deux coniques.*

Indication de la solution géométrique ([1]).

1° Soient Δ_1 et Δ_2 les axes radicaux de C_1 et C_3, d'une part, de C_2 et C_3 d'autre part. Appelons p_1 et p_2 les points de contact respectifs du cercle O avec les cercles C_1 et C_2, a_1 et a_2 les points de rencontre respectifs de Δ_1 et de Δ_2 avec l'axe radical des deux cercles O et C_3. Le point a_1 est le centre radical des trois cercles O, C_1, C_3; pareillement, le point a_2 est le centre radical des trois cercles O, C_2, C_3; enfin, la droite $p_1\,p_2$ passe par l'un des centres de similitude des cercles C_1 et C_2. Il suit de là que si les contacts du cercle O avec C_1 et C_2 sont d'espèce déterminée (interne ou externe), à tout point a_1 correspond une position et une seule de a_2, et inversement. Autrement dit, les points a_1 et a_2 tracent deux divisions homographiques sur Δ_1 et sur Δ_2; donc la droite $a_1\,a_2$ enveloppe une conique. L'enveloppe demandée est donc un système de deux coniques, dont l'une correspond au cas où les contacts sont de même espèce, et l'autre, au cas où les contacts sont d'espèces différentes.

2° Soient O et O_1 deux positions infiniment voisines du cercle mobile, I le point de rencontre des axes radicaux de chacun de ces cercles et du cercle C_3. La position limite du point I est le point de contact de $a_1 a_2$ avec son enveloppe. Or, le point I est le centre radical des trois circonférences O, O_1, C_3; il est donc sur l'axe radical de O et de O_1. D'autre part, si la circonférence O_1 se rapproche indéfiniment de la circonférence O, supposée fixe, l'axe radical des circonférences O et O_1 a pour limite la ligne $p_1\,p_2$. Il en résulte que le point I a pour position limite l'intersection de $p_1 p_2$ avec $a_1 a_2$ et, par conséquent, que le second lieu coïncide avec l'enveloppe des axes radicaux. X. A.