NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DUPORCQ

Solution du problème proposé en 1896 au concours général de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 15 (1896), p. 566-571

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1896_3_15__566_1>

SOLUTION DU PROBLÈME PROPOSÉ EN 1896 AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. E. DUPORCQ.

On donne une ellipse E *qui, rapportée à ses axes, a pour équation* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

1° *On considère des ellipses* S *dont les axes coïncident en position avec ceux de l'ellipse* E *et ont* 2 A, 2 B *pour longueur. Trouver la relation qui doit lier* A, B *pour que l'on puisse inscrire dans* E *une infinité de triangles* PQR *circonscrits à* S *et, dans ces conditions, trouver le lieu des sommets des rectangles formés par les tangentes aux ellipses* S *en leurs sommets. Montrer que, dans ces mêmes conditions, les normales à* E *aux points* P, Q, R *concourent en un point* N.

2° *Examiner si les ellipses* S *obtenues au n°* 1 *représentent toutes les ellipses concentriques à* E, *et telles qu'on puisse inscrire dans* E *une infinité de triangles*

PQR *circonscrits à* S, *les normales à* F *aux points* P, Q, R *étant concourantes.*

3° *Montrer que parmi les ellipses* S, *il y en a pour lesquelles les normales* PN, QN, RN *aux points* P, Q, R *de l'ellipse* E *passent respectivement par les pôles* P', Q', R' *par rapport à* E *des côtés* QR, RP, PQ *du triangle* PQR.

4° S *satisfaisant aux conditions énoncées au n°* 3, *trouver le lieu des centres des cercles conjugués au triangle* P'Q'R'; *l'enveloppe de ces cercles est le lieu des points de rencontre* N *des normales* PN, QN, RN *à l'ellipse* F.

1° Parmi les triangles PQR inscrits à l'ellipse E et circonscrits à l'ellipse S, considérons celui pqr dont un sommet coïncide avec l'une des extrémités p du grand axe de E : le côté qr touche évidemment S en l'un de ses sommets α. Soient q' et r' les points où les côtés pq et pr coupent la tangente menée à S en son sommet α', opposé à α. On sait que

$$\overline{\alpha q}\;\overline{\alpha' q'} = B^2$$

ou

$$\overline{\alpha q}^2 \frac{\overline{p\alpha'}}{\overline{p\alpha}} = B^2,$$

ce qui s'écrit, si le centre O est intérieur au segment $p\alpha$:

$$\left(1 - \frac{A^2}{a^2}\right)\frac{a+A}{a-A} = \frac{B^2}{b^2},$$

et, s'il lui est extérieur,

$$\left(1 + \frac{A^2}{a^2}\right)\frac{a-A}{a+A} = \frac{B^2}{b^2}.$$

Il devra donc y avoir, entre les *longueurs* A et B, une des trois relations suivantes :

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} - 1 = 0,$$

$$\frac{A}{a} - \frac{B}{b} - 1 = 0,$$

$$\frac{A}{a} - \frac{B}{b} + 1 = 0,$$

puisque, A, B, a et b désignant des longueurs, il est impossible que

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + 1 = 0.$$

Si, au contraire, on considère A et B comme les coordonnées d'un des sommets des rectangles construits sur les axes des ellipses S, on voit que le lieu de ces points est constitué par les quatre droites que représentent les équations précédentes : elles forment un parallélogramme dont les sommets coïncident avec ceux de l'ellipse E.

Si l'on fait une transformation homographique telle qu'aux points à l'infini des axes de E correspondent les ombilics du plan, on obtient la propriété suivante :

Étant données deux hyperboles équilatères concentriques H *et* H', *pour qu'il existe une infinité de triangles inscrits à* H *et circonscrits à* H', *il faut et il suffit que les foyers de* H' *soient sur les directrices de* H.

D'une manière générale, soient E et S deux coniques telles qu'il existe une infinité de triangles PQR inscrits à la première et circonscrits à la seconde; soit Γ la conique conjuguée à la fois à deux de ces triangles PQR et $P_1Q_1R_1$. Il est bien évident que, par polaires réciproques relatives à Γ, les deux coniques E et S se transformeront l'une dans l'autre; il en résulte que le triangle conjugué à la fois à ces deux coniques est aussi conjugué à Γ; par suite, les sommets de ce triangle et ceux du triangle PQR sont sur une même conique, car deux triangles conjugués à une conique ont leurs sommets sur une conique.

Dans le cas particulier de l'énoncé, où E et S ont les mêmes axes, on pourra, par leur centre commun et par les sommets de l'un quelconque des triangles PQR, faire passer une hyperbole équilatère d'asymptotes parallèles aux axes communs; les normales à l'ellipse E aux sommets du triangle PQR seront donc concourantes.

Examinons encore le cas de deux hyperboles équilatères concentriques : on voit que le cercle circonscrit au triangle PQR passe par leur centre commun. D'ailleurs, ce cercle est circonscrit à une infinité de triangles circonscrits à l'hyperbole S : l'un d'eux a pour côtés les deux asymptotes de cette conique; le troisième côté de ce triangle touche S en son milieu, qui est précisément le centre du cercle considéré. L'hyperbole S est donc le lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles PQR.

En transformant homographiquement ce dernier résultat, de manière que les points cycliques deviennent les points à l'infini de deux droites rectangulaires, on trouve que les hyperboles d'Apollonius, obtenues dans le cas de l'énoncé, ont leurs centres sur l'ellipse S. Or, si α et β représentent les coordonnées du centre d'une hyperbole d'Apollonius relative à l'ellipse E, les coordonnées du point de concours des normales correspondantes sont

$$\frac{c^2\alpha}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{c^2\beta}{b^2}.$$

De là résulte que le lieu du point N est une ellipse dont l'équation est facile à écrire :

$$\frac{a^4 x^2}{A^2} + \frac{b^4 y^2}{B^2} = c^4.$$

Les sommets des rectangles construits sur les axes de ces ellipses (N) se trouvent sur les côtés du parallélogramme admettant pour sommets les points de rebroussement de la développée E.

2° Toutes les ellipses Σ concentriques à E, et telles qu'on puisse inscrire dans E une infinité de triangles PQR circonscrits à Σ, les normales à E aux points P, Q et R étant concourantes, ont les mêmes axes que E; les points P, Q et R étant, en effet, sur une hyperbole d'Apollonius, il existe une conique Γ conjuguée au triangle PQR et dont les axes coïncident en position avec ceux de E, et Σ n'est autre que la polaire réciproque de E relativement à Γ. Les ellipses S représentent donc toutes les coniques Σ.

3° La droite PP′ est évidemment conjuguée harmonique de la tangente en P par rapport aux droites PQ et PR : pour qu'elle coïncide avec la normale PN, il faut et il suffit que les droites PQ et PR soient également inclinées sur cette normale. Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites PP′, QQ′ et RR′ soient les hauteurs du triangle P′Q′R′ est que les ellipses E et S soient homofocales. Il existe évidemment deux ellipses S homofocales à E; leurs axes ont pour longueurs les valeurs absolues des racines du système d'équations

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 1,$$

$$A^2 - a^2 = B^2 - b^2.$$

4° Soit S_1 l'une de ces deux ellipses; nous avons vu plus haut qu'à chaque ellipse S correspond une ellipse lieu du point N. A l'ellipse S_1 correspondra ainsi une ellipse $(N)_1$. Le point N est le point de concours des hauteurs du triangle P'Q'R'; c'est donc le centre du cercle conjugué à ce triangle. Ce cercle est d'ailleurs harmoniquement circonscrit à l'ellipse E, puisqu'il est conjugué à un triangle circonscrit à cette conique; il coupe donc orthogonalement le cercle orthoptique de E. Ainsi le problème revient à chercher l'enveloppe d'un cercle dont le centre décrit une courbe C et qui a une puissance donnée par rapport à un point fixe O; cette enveloppe est évidemment une courbe anallagmatique par rapport à ce pôle fixe, et le lieu du milieu des segments limités à deux points réciproques de la courbe est la podaire de la courbe C, relativement à O. Si l'on désigne par α et β les axes de l'ellipse $(N)_1$, l'équation de cette enveloppe en coordonnées polaires est évidemment

$$\rho^2 - 2\rho\cos\omega\sqrt{\alpha^2+\beta^2\tan^2\omega} + a^2 + b^2 = 0.$$

En coordonnées cartésiennes, elle s'écrit

$$(x^2+y^2+a^2+b^2)^2 = 4(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2).$$